



Université
de Rennes



Stabilité d'ondes périodiques dans une
famille d'EDP hamiltonienne.

Courant Thomas

Stage de M2, encadré par Louise Gassot et Miguel Rodrigues à l'IRMAR.

Avril-Juin 2025

Table des matières

Introduction	2
1 Equation hamiltonienne et ondes périodiques	3
1.1 La famille d'équations	3
1.2 Les ondes périodiques	4
2 Critère de stabilité et d'instabilité	5
2.1 Critère d'instabilité spectrale	6
2.1.1 Le problème abstrait	6
2.1.2 L'opérateur linéarisé et sa fonction d'Evans	7
2.1.3 Le critère d'instabilité spectrale pour le cas système	10
2.1.4 Critère d'instabilité spectrale pour le cas scalaire	16
2.2 Critère de stabilité orbitale	17
2.2.1 Problème abstrait et hypothèses	17
2.2.2 Stabilité orbitale co-périodique	19
2.3 Discussion des hypothèses et de l'indice de stabilité pour le cas considéré	22
2.3.1 Cas scalaire	22
2.3.2 Cas système	23
2.3.3 Conclusion la stabilité des ondes périodiques considérées	24
3 Limite en double soliton	26
3.1 Comportement asymptotique de l'action et de la période	32
3.2 Comportement asymptotique de la Hessienne de l'action	33
3.3 Instabilité dans le cas limite	39
A Comportement asymptotique des intégrales	43
A.1 Développement de la forme générale	43
A.1.1 Parties sans singularités	44
A.1.2 Singularité au bord	45
A.1.3 Singularité du à la racine double	48
A.2 Développement asymptotique de différentes intégrales.	55
Références	59

Introduction

Ce document a pour objectif de réunir les travaux réalisés durant mon stage de M2. Celui-ci avait pour objectif l'étude de la stabilité des ondes périodiques dans une certaine famille d'équation hamiltonienne.

Le premier objectif était de comprendre les différentes méthodes et critères permettant de démontrer de l'instabilité ou de la stabilité pour ces ondes. Cela est revenu à l'étude de l'article [BGMR16] qui démontre des conditions suffisantes d'instabilité ou de stabilité. Ces conditions, avec leurs preuves ou idées de preuves, sont présentés dans la partie 2.

Puis dans un deuxième temps, l'objectif a été d'étendre l'étude faite dans [BGMR20]. C'est-à-dire de regarder dans des cas limites les différents critères trouvés. Cela permet de conclure à de la stabilité ou de l'instabilité pour certaines ondes périodiques. Dans le papier, les cas traités sont celui d'ondes périodiques de petites amplitudes qui approche des constantes d'équilibres et celles de grandes périodes qui approchent des solitons. Mon but étant d'étendre l'analyse à des ondes périodiques de grandes périodes approchant 2 solitons. Ceci est présenté dans la partie 3.

Enfin, j'aimerais remercier Sylvie Benzoni-Cavage et Dmitry Pelinovsky pour les discussions que l'on a eues, notamment sur le résultat de la partie 3. De plus, je tiens à remercier très chaleureusement Louise Gassot et Miguel Rodrigues pour leur encadrement durant ce stage, avec qui j'ai l'immense plaisir de continuer à travailler pour ma thèse.

1 Equation hamiltonienne et ondes périodiques

1.1 La famille d'équations

On se place dans le même cadre que dans [BGNR13, BGMR16, BGMR20], c'est-à-dire qu'on s'intéresse à une famille d'EDP hamiltonienne de la forme

$$\partial_t U = \partial_x (B \delta \mathcal{H}[U]), \quad (1.1.1)$$

où U est à valeurs dans \mathbb{R}^N , B est une matrice symétrique inversible réelle, \mathcal{H} une fonctionnelle qui dépend de U et de U_x , on utilise la notation $[\cdot]$ pour signifier cela. De plus, δ correspond à la dérivée variationnelle de \mathcal{H} . On peut la définir comme

$$\delta \mathcal{H}[U] = \nabla_U \mathcal{H}(U, U_x) - \partial_x (\nabla_{U_x} \mathcal{H}(U, U_x)).$$

Le premier point à observer est que l'équation (1.1.1) est invariante par l'action des translations. En effet, comme \mathcal{H} et B ne dépendent pas de x , si $U(t, \cdot)$ est une solution, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^N$ $U(t, \cdot + x_0)$ est une solution.

Le deuxième point à regarder, ce sont les quantités conservées automatiquement par les solutions de (1.1.1). Il est clair que l'hamiltonien sera conservé, on peut le voir, car on a la loi de conservation suivante, pour U une solution de (1.1.1),

$$\partial_t \mathcal{H}[U] = \partial_x \left(\frac{1}{2} \delta \mathcal{H}[U] \cdot B \delta \mathcal{H}[U] + \nabla_{U_x} \mathcal{H}[U] \cdot \partial_x (B \delta \mathcal{H}[U]) \right).$$

L'invariance par translation nous donne une deuxième loi de conservation, une pour *l'impulsion*. Dans notre cas, l'impulsion est définie comme étant

$$Q(U) := \frac{1}{2} U \cdot B^{-1} U,$$

où \cdot correspond au produit scalaire sur \mathbb{R}^N . La loi de conservation est alors donnée par

$$\partial_t Q(U) = \partial_x (U \cdot \delta \mathcal{H}[U] + L \mathcal{H}[U]).$$

Ici L correspond à la transformée de Legendre formelle que l'on peut définir comme

$$L \mathcal{H}[U] = U_x \cdot \nabla_{U_x} \mathcal{H}[U] - \mathcal{H}[U].$$

Ces relations nous seront très utiles par la suite pour étudier la dynamique autour des ondes périodiques.

Dans notre étude nous allons nous restreindre à une certaine classe d'équation, on fait donc l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1. *On suppose $N = 1$ ou $N = 2$.*

1. Si $N = 1$ alors on suppose $U = v$, $B = b \in \mathbb{R}^*$ et $\mathcal{H}[v] = \mathcal{E}(v, v_x)$.

2. Si $N = 2$ alors on suppose $U = (v, u)^T$, $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$ Et

$$\mathcal{H}[U] = \mathcal{F}(v, u) + \mathcal{E}(v, v_x).$$

Dans les deux cas, on suppose que \mathcal{E} est quadratique en v_x et

$$\kappa := \partial_{v_x} \mathcal{E} > 0.$$

Si $N = 2$, on suppose aussi que \mathcal{F} est quadratique en u et

$$\tau := \partial_u \mathcal{F} > 0.$$

Cette hypothèse a pour but de contenir certaines équations connues. La première est une version quasi-linéaire de l'équation de Korteweg-de Vries. Cela correspond au cas $N = 1$, on peut supposer alors $B = 1$ et l'équation devient alors

$$\partial_t v = -\partial_x \left(\frac{1}{2} \kappa'(v) v_x^2 - \kappa(v) v_{xx} \right) + \partial_x (f'(v)), \quad (\text{qKdV})$$

où $f(v) = \mathcal{E}(v, 0)$.

Pour le cas $\kappa = 1$ et $f'(v) = -\frac{1}{2} v^2$ on retrouve l'équation (KdV)

$$v_t + v v_x + v_{xxx} = 0, \quad (\text{KdV})$$

et pour $\kappa = 1$ et $f'(v) = -\frac{1}{2} v^4$ on retrouve l'équation (mKdV) focalisante

$$v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0. \quad (\text{mKdV})$$

Ces deux équations sont intégrables, on connaît donc très bien leurs dynamiques. Dans la partie 3, on comparera les résultats connus sur mKdV focalisante aux résultats que l'on a obtenus.

Dans le cas système, $N = 2$, on pense aux systèmes d'Euler-Korteweg en coordonnées eulériennes

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \partial_x (\delta \mathcal{E}(\rho, \rho_x)) = 0. \end{cases} \quad (\text{EKE})$$

Qui dans notre formalisme donne $N = 2$, $U = (\rho, u)^T$, $B = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{H}[U] = \frac{1}{2} u^2 + \mathcal{E}[\rho]$. Mais aussi à ce moment même système en coordonnées lagrangiennes

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x (u) = 0, \\ \partial_t u - \partial_x (\delta e(v, v_x)) = 0. \end{cases} \quad (\text{EKL})$$

Ici, on a $N = 2$, $U = (v, u)^T$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{H}[U] = \frac{1}{2} u^2 + e[v]$.

1.2 Les ondes périodiques

On va s'intéresser à la stabilité autour de solutions particulières de (1.1.1) : les ondes progressives périodiques. Une onde progressive U est une solution sous la forme d'un profil \underline{U} qui se propage à la vitesse c , c'est-à-dire $U(t, x) = \underline{U}(x - ct)$. En réinjectant cette forme dans l'équation, on peut trouver les équations que doit vérifier un tel profil. Tout d'abord en utilisant que B est inversible on a

$$\partial_x (\delta (\mathcal{H} + cQ) [\underline{U}]) = 0.$$

Ainsi il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}^N$ telle que

$$\delta (\mathcal{H} + cQ) [\underline{U}] + \lambda = 0. \quad (1.2.1)$$

Or cette équation est exactement l'équation d'Euler-Lagrange pour le lagrangien

$$\mathcal{L}([U]; \lambda, c) = \mathcal{H}[U] + cQ(U) + \lambda \cdot U,$$

c'est-à-dire que \underline{U} est un point caractéristique de \mathcal{L} . Ceci nous donne une nouvelle équation, grâce à la transformée de Legendre formelle, on obtient que

$$\partial_x (\text{L}\mathcal{L}[\underline{U}]).$$

Ainsi il existe une autre constante $\mu \in \mathbb{R}$ telle que

$$\text{L}\mathcal{L}[\underline{U}] = \mu \quad (1.2.2)$$

A translation près, les équations (1.2.1)-(1.2.2) décrivent complètement les ondes progressives, elles sont donc paramétrisées par

$$(c, \boldsymbol{\lambda}, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Ces équations sont simplement des EDO que l'on peut expliciter grâce à l'hypothèse 1. On peut supposer $I(v, 0) = 0$ si $N = 2$ et en notant $f(v) = \mathcal{E}(v, 0)$, on obtient les équations suivantes.

Si $N = 2$, une onde périodique $\underline{U} = (\frac{v}{u})$ paramétrée par $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$, vérifie

$$\begin{cases} u = g(v; \lambda_2, c), \\ \frac{1}{2}\kappa(v)\underline{v}_x^2 + \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c) = \mu, \end{cases} \quad (1.2.3)$$

où $g(v; \lambda_2, c) = \frac{-1}{\tau(v)}(\frac{c}{b}v + \lambda_2)$ et $\mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c) = -f(v) + \frac{1}{2}\tau(v)g(v; \lambda_2, c)^2 - \lambda_1 v$.

Dans le cas scalaire, $N = 1$ une onde périodique \underline{v} vérifie

$$\frac{1}{2}\kappa(\underline{v})\underline{v}_x^2 + \mathcal{W}(\underline{v}; \lambda, c) = \mu, \quad (1.2.4)$$

où $\mathcal{W}(v; \lambda, c) = -f(v) - \frac{1}{2}\frac{c}{b}v^2 - \lambda v$.

En fonction de la forme de leur profil, on peut classifier différentes ondes progressives.

- Les solitons, aussi appelés ondes solitaires, lorsque \underline{U} admet une même limite en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Les ondes périodiques, lorsque \underline{U} est périodique.

Pour la stabilité des solitons, la théorie est très bien connue, on peut notamment la retrouver dans [GSS87], [KP13] et [AP09]. Tout d'abord les solitons peuvent être paramétrisés par c leur vitesse et \underline{U}_s leurs valeurs à l'infini. Les autres constantes sont alors données par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} &= -\nabla_U(\mathcal{H} + cQ)(\underline{U}_s, 0), \\ \mu &= -\boldsymbol{\lambda} \cdot \underline{U}_s - (\mathcal{H} + cQ)(\underline{U}_s, 0). \end{aligned}$$

Pour $(c, \underline{U}_s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, on note \underline{U} le profil du soliton associé. On peut alors définir son moment de Boussinesq comme étant

$$\mathcal{M}(c, \underline{U}_s) := \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{H}[\underline{U}] + cQ(\underline{U}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \underline{U} + \mu) dx.$$

En notant d_c la dérivée selon la vitesse c avec l'état à l'infini \underline{U}_s fixé, on a l'alternative suivante.

- Si $d_c^2 \mathcal{M} > 0$ le soliton est orbitalement stable.
- Si $d_c^2 \mathcal{M} < 0$ le soliton est spectralement instable.

Dans un premier temps, l'objectif va être de trouver des critères de stabilité ou d'instabilité équivalent pour les ondes périodiques. Ce qui va jouer le rôle du moment de Boussinesq c'est l'action de l'onde périodique. Pour une onde périodique de profil \underline{U} de période Ξ paramétrisé par $(c, \boldsymbol{\lambda}, \mu)$, on définit l'action comme étant

$$\Theta(c, \boldsymbol{\lambda}, \mu) = \int_0^\Xi (\mathcal{H}[\underline{U}] + cQ(\underline{U}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \underline{U} + \mu) dx.$$

Une propriété importante, donnée par la proposition 1 dans [BGNR13], est que

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \mu} = \Xi, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial c} = \int_0^\Xi Q(\underline{U}) dx, \quad \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \Theta = \int_0^\Xi \underline{U} dx.$$

2 Critère de stabilité et d'instabilité

Dans cette partie l'objectif va être, étant donné une onde périodique, de montrer une condition suffisante à l'instabilité spectrale de celle-ci, sous-partie 2.1, et une condition à la stabilité orbitale de celle-ci, sous-partie 2.2. Cette partie reprend les résultats de [BGMR16]. Une autre référence intéressante pour cette partie est la thèse de Colin Mietka [Mie17b].

2.1 Critère d'instabilité spectrale

On commence par s'intéresser à l'instabilité spectrale, on reprend donc la partie 3 de [BGM16].

2.1.1 Le problème abstrait

On regarde toujours l'équation suivante

$$\partial_t U = B \partial_x (\delta \mathcal{H}[U]). \quad (2.1.1)$$

On rappelle que si U vérifie (2.1.1) alors U vérifie de plus la loi de conservation suivante

$$\partial_t (Q(U)) = \partial_x (U \cdot \delta(\mathcal{H})[U] + L(\mathcal{H})[U]) \quad (2.1.2)$$

L'objectif va être de trouver des informations spectrales sur l'équation (2.1.1) lorsqu'on la linéarise autour d'ondes périodiques.

On fait l'hypothèse suivante sur l'existence et la paramétrisation des ondes périodiques par rapport à (μ, λ, c) .

Hypothèse 2.1.1. *Il existe un ouvert Ω de \mathbb{R}^{N+2} et une famille d'ondes périodiques \underline{U} paramétrée par $(\mu, \lambda, c) \in \Omega$ tel que \underline{U} vérifie*

$$\delta(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}] + \lambda = 0, \quad (2.1.3)$$

et

$$L(\mathcal{H} + cQ + \lambda \cdot)[\underline{U}] = \mu. \quad (2.1.4)$$

Remarque 2.1.1. *On peut remarquer que si \underline{U} vérifie (2.1.3) alors (2.1.4) devient*

$$\underline{U} \cdot \delta(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}] + L(\mathcal{H} + cQ \cdot)[\underline{U}] = \mu.$$

À partir de maintenant, on fixe une onde périodique de profil \underline{U} et de période Ξ . Quitte à translater \underline{U} , on peut considérer que $\underline{v}_x(0) = 0$. L'objectif est de linéariser l'équation (2.1.1) autour de \underline{U} .

L'onde périodique \underline{U} est une onde progressive avec une vitesse c , pour que \underline{U} soit un point critique on se place dans le référentiel mobile qui va à la vitesse c . C'est-à-dire pour \tilde{U} une solution de (2.1.1) on pose $V(t, x) = \tilde{U}(t, x - ct)$, alors V vérifie

$$\partial_t V = B \partial_x (\delta(\mathcal{H} + cQ)[V]).$$

Ainsi pour étudier le linéarisé de (2.1.1) autour de \underline{U} on pose $U = V - \underline{U}$ qui vérifie

$$\partial_t U = B (\delta(\mathcal{H} + cQ)[U + \underline{U}] - \delta(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}]).$$

L'équation linéarisée autour de \underline{U} dans le référentiel mobile est donc

$$\partial_t U = B \partial_x (\text{Hess}(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}]U) = B \partial_x (\mathbf{A}U) = \mathcal{A}U, \quad (2.1.5)$$

où on a défini les opérateurs suivants

$$\mathbf{A} = \text{Hess}(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}] \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = B \partial_x \mathbf{A}.$$

On rappelle que pour une fonctionnelle, \mathcal{G} , l'opérateur $\text{Hess} \mathcal{G}$ correspond à la Hessienne variationnelle et peut-être définie comme

$$(\text{Hess} \mathcal{G}[\underline{U}]U)_\alpha := \frac{\partial^2 \mathcal{G}[\underline{U}]}{\partial U_\alpha \partial U_\beta} U_\beta + \frac{\partial^2 \mathcal{G}[\underline{U}]}{\partial U_\alpha \partial U_{\beta,x}} U_{\beta,x} - \partial_x \left(\frac{\partial^2 \mathcal{G}[\underline{U}]}{\partial U_{\alpha,x} \partial U_\beta} U_\beta + \frac{\partial^2 \mathcal{G}[\underline{U}]}{\partial U_{\alpha,x} \partial U_{\beta,x}} U_{\beta,x} \right).$$

On a utilisé la convention de sommation d'Einstein.

Par exemple pour $N = 1$ pour $\underline{U} = \underline{v}$, en notant $\mathcal{E}(v, 0) = f(v)$, on a

$$\mathbf{A} = -\partial_x(\kappa(\underline{v})\partial_x) + f''(\underline{v}) + \frac{c}{b} + \frac{1}{2}\kappa''(\underline{v})\underline{v}_x^2 - \partial_x(\kappa'(\underline{v})\underline{v}_x) \quad (2.1.6)$$

Dans le cas $N = 2$, on peut toujours supposer $I(\cdot, 0) = 0$, en notant $\mathcal{E}(v, 0) = f(v)$, pour $\underline{U} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$, si on écrit \mathbf{A} par blocs on obtient

$$A = \left(\begin{array}{c|c} -\partial_x(\kappa(\underline{v})\partial_x) + f''(\underline{v}) + \frac{1}{2}\kappa''(\underline{v})\underline{v}_x^2 - \partial_x(\kappa'(\underline{v})\underline{v}_x) + \frac{1}{2}\tau''(\underline{v})\underline{u}^2 & \tau'(\underline{v})\underline{u} \\ \hline \tau'(\underline{v})\underline{u} & \tau(\underline{v}) \end{array} \right) \quad (2.1.7)$$

Avant de s'intéresser aux propriétés spectrales de \mathcal{A} , comme au niveau non linéaire, si U est solution de (2.1.5) alors U vérifie une loi de conservation en plus qui est

$$\partial_t(\nabla Q(\underline{U}) \cdot \underline{U}) = \partial_x \left(\underline{U} \cdot \delta(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}] + \underline{U} \cdot \mathbf{A} \underline{U} - \underline{U} \cdot \nabla_{\underline{U}}(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}] \right) + \partial_x \left(\partial_{v, v_x}^2 \mathcal{E}[\underline{v}] \underline{v}_x \underline{v} + \partial_{v_x}^2 \mathcal{E}[\underline{v}] \underline{v}_x \underline{v} \right),$$

où $\mathcal{H}[U] = \mathcal{I}(v, u) + \mathcal{E}(v, v_x)$.

Elle peut être obtenue directement de (2.1.5) ou en linéarisant autour de \underline{U} (2.1.2). Et elle se simplifie en

$$\partial_t(\nabla Q(\underline{U}) \cdot \underline{U}) = \partial_x \left(\underline{U} \cdot \mathbf{A} \underline{U} - \kappa v_{xx} \underline{v} + \kappa v_x v_x \right), \quad (2.1.8)$$

où $\kappa(v) = \partial_x^2 \mathcal{E}[v] > 0$ par hypothèse.

2.1.2 L'opérateur linéarisé et sa fonction d'Evans

L'étude de la stabilité linéaire de \underline{U} correspond à l'étude du spectre de \mathcal{A} dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Plus précisément, on a la définition suivante.

Définition 2.1.1. *L'onde périodique \underline{U} est linéairement spectralement instable si dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ on a*

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) > 0\} \neq \emptyset.$$

Elle est linéairement spectralement stable si dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) > 0\} = \emptyset.$$

L'opérateur \mathcal{A} étant un opérateur différentiel à coefficients Ξ -périodiques, un outil pour l'étudier est la décomposition Floquet-Bloch que l'on peut retrouver dans [Kuc93]. On associe à \mathcal{A} une famille d'opérateurs \mathcal{A}_ξ agissant sur $L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$ pour $\xi \in [-\frac{\pi}{\Xi}, \frac{\pi}{\Xi}]$ définie par

$$\mathcal{A}_\xi = e^{-i\xi \cdot} \mathcal{A} e^{i\xi \cdot}.$$

L'intérêt est que le spectre des opérateurs \mathcal{A}_ξ permettent de connaître le spectre de \mathcal{A} , par la relation

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup_{\xi \in [-\frac{\pi}{\Xi}, \frac{\pi}{\Xi}]} \sigma(\mathcal{A}_\xi).$$

ξ est appelé *l'exposant de Floquet*.

L'intérêt est que le spectre de chaque \mathcal{A}_ξ est composé uniquement de valeurs propres, chacune dépendant continûment de ξ [Gar93]. Il est donc plus facile à étudier que le spectre complet de \mathcal{A} sur $L^2(\mathbb{R}^N)$. De plus, dû aux symétries du problème, le spectre de \mathcal{A} vient par quadruplets $(z, -z, \bar{z}, -\bar{z})$, c'est lemme suivant.

Lemme 2.1.1. *Le spectre de \mathcal{A} est symétrique par rapport à \mathbb{R} et par rapport à $i\mathbb{R}$.*

Démonstration. Comme \mathcal{A} est un opérateur différentiel à coefficients réels, il est clair que si $z \in \sigma(\mathcal{A})$ alors $\bar{z} \in \sigma(\mathcal{A})$.

Pour l'autre symétrie, si on se donne $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors on sait qu'il existe $\xi \in [-\frac{\pi}{\Xi}, \frac{\pi}{\Xi}]$ tel que z est une valeur propre de \mathcal{A}_ξ sur $L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$. Soit ϕ un vecteur propre associé à z alors, on a

$$e^{-i\xi \cdot} \partial_x (B \mathbf{A} e^{i\xi \cdot} U) = zU.$$

Ainsi, on a que

$$B \mathbf{A} (e^{i\xi \cdot} U) = z \left(\int_0^\cdot U(w) e^{i\xi w} dw + \frac{1}{z} B \mathbf{A} (e^{i\xi \cdot} U)(0) \right),$$

donc

$$B \mathbf{A} \partial_x \left(\int_0^\cdot U(w) e^{i\xi w} dw + \frac{1}{z} B \mathbf{A} (e^{i\xi \cdot} U)(0) \right) = z \left(\int_0^\cdot U(w) e^{i\xi w} dw + \frac{1}{z} B \mathbf{A} (e^{i\xi \cdot} U)(0) \right),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} -e^{-i\xi \cdot} B \mathbf{A} \partial_x e^{i\xi \cdot} \left(-e^{-i\xi \cdot} \int_0^\cdot U(w) e^{i\xi w} dw - e^{-i\xi \cdot} \frac{1}{z} B \mathbf{A} (e^{i\xi \cdot} U)(0) \right) = \\ -z \left(-e^{-i\xi \cdot} \int_0^\cdot U(w) e^{i\xi w} dw - e^{-i\xi \cdot} \frac{1}{z} B \mathbf{A} (e^{i\xi \cdot} U)(0) \right). \end{aligned}$$

Or comme $\mathbf{A} = \text{Hess}(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}]$ est auto-adjoint, on a $\mathcal{A}_\xi^* = -e^{-i\xi \cdot} B \mathbf{A} \partial_x e^{i\xi \cdot}$. Ainsi, on a $-z \in \sigma(\mathcal{A}_\xi^*) = \overline{\sigma(\mathcal{A}_\xi)}$. On a donc bien $-\bar{z} \in \sigma(\mathcal{A})$. \square

Ici, on ne s'intéresse qu'à des perturbations de même période que \underline{U} , cela revient à étudier le spectre de \mathcal{A}_ξ pour l'exposant de Floquet $\xi = 0$. Par la suite, on notera \mathcal{A} pour \mathcal{A}_0 , qui agit donc sur $L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$, et dont le spectre est composé seulement de valeurs propres.

On s'intéresse donc, pour $z \in \mathbb{C}$, à l'équation

$$\mathcal{A} U = zU. \tag{2.1.9}$$

En particulier, on cherche pour quelle valeur de $z \in \mathbb{C}$ cette équation admet une solution Ξ -périodique.

On commence par donner des relations pour les solutions de (2.1.9) qui nous seront utiles plus tard.

Lemme 2.1.2. Soit U une solution, pour $z \in \mathbb{C}$, de (2.1.9), alors on a

$$z \int_0^\Xi U(x) dx = B[\mathbf{A}U]$$

et

$$z \int_0^\Xi \nabla Q(\underline{U}(x)) \cdot U(x) dx = zB^{-1} \underline{U}(0) \cdot \int_0^\Xi U(x) dx - \underline{\kappa}(0) \underline{\nu}_{xx}(0)[\nu].$$

On a noté pour une fonction g , $[g] = g(\Xi) - g(0)$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ et U une solution de (2.1.9), alors si on pose $V(t, \cdot) = e^{zt} U(\cdot)$ on a

$$\partial_t V = \mathcal{A} V. \tag{2.1.10}$$

Par (2.1.8), on sait que

$$\int_0^\Xi \partial_t (\nabla Q(\underline{U}) \cdot e^{zt} U) = \int_0^\Xi e^{zt} \partial_x (\underline{U} \cdot \mathbf{A}U - \underline{\kappa} \nu_{xx} \nu + \underline{\kappa} \nu_x \nu_x) dx$$

Ce qui donne après intégration, en utilisant que \underline{U} est Ξ périodique et que $\underline{v}_x(0) = 0$,

$$z \int_0^\Xi \nabla Q(\underline{U}(x)) \cdot \underline{U}(x) dx = \underline{U}(0) \cdot [\mathbf{A} \underline{U}] - \underline{\kappa}(0) \underline{v}_{xx}(0)[\nu],$$

car pour une fonction f on a $[f] = f(\Xi) - f(0)$.

Or, on a aussi, par (2.1.10), que

$$z e^{zt} \int_0^\Xi U(x) dx = \int_0^\Xi \partial_t (e^{zt} U) = e^{zt} B \int_0^\Xi \partial_x (\mathbf{A} U) dx = B [\mathbf{A} U] e^{zt}.$$

En regroupant tout, on a bien

$$z \int_0^\Xi \nabla Q(\underline{U}(x)) \cdot \underline{U}(x) dx = z B^{-1} \underline{U}(0) \cdot \int_0^\Xi U(x) dx - \underline{\kappa}(0) \underline{v}_{xx}(0)[\nu].$$

□

Comme on cherche les valeurs propres de \mathcal{A} , il nous faut maintenant introduire l'outil qui va remplacer le polynôme caractéristique, la fonction d'Evans. Il nous faut partir des équations données par (2.1.9).

Si $N = 2$, ce système d'EDO correspond à une première équation d'ordre 1 en u et une équation d'ordre 3 en v . Il est donc équivalent à un système de 4 EDO, toutes d'ordre 1. On note ce système d'EDO

$$\frac{d}{dx} W = A(x; z) W. \quad (2.1.11)$$

On note $F(., z)$ la solution fondamentale de ce système, c'est-à-dire la solution de

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} F(x; z) = A(x; z) F(x; z), \\ F(0; z) = \text{Id}. \end{cases}$$

On peut maintenant introduire la fonction d'Evans associée

$$D: \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \det(F(\Xi; z) - F(0; z)) \end{array}.$$

Si $N = 1$, le problème spectral (2.1.9) correspond à une EDO d'ordre 3 en v . Il est donc équivalent à un système de 3 EDO, toutes d'ordres 1. Comme précédemment, on note $F(., z)$ la solution fondamentale de ce système à z fixé. La fonction d'Evans se définit alors de manière identique.

$$D: \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \det(F(\Xi; z) - F(0; z)) \end{array}.$$

Il est facile de voir que si $r \in \mathbb{R}$ alors $D(r) \in \mathbb{R}$ et par régularité de la solution d'une EDO en fonction des paramètres, D est analytique en z . On l'introduit car D joue le rôle de polynôme caractéristique. En effet, les zéros de D sont liés aux valeurs propres de \mathcal{A} dans $L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.1.1. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $D(z) = 0$, alors z est une valeur propre de \mathcal{A} dans $L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$.*

Démonstration. Soit un tel $z \in \mathbb{C}$, il nous suffit de montrer l'existence d'une solution, non nulle, Ξ périodique de (2.1.9). Or on a

$$D(z) = \det(F(\Xi; z) - F(0; z)) = 0.$$

On se donne $V_0 \in \ker(F(\Xi; z) - F(0; z))$ non nulle, alors en notant V la solution de

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} V(x) = A(x; z) V(x), \\ V(0) = V_0, \end{cases}$$

on sait que $V(., z) = F(., z) V_0$. Ainsi V est Ξ périodique, car

$$V(\Xi) - V(0) = (F(\Xi; z) - F(0; z)) V_0 = 0.$$

Ainsi, si on note U la solution de (2.1.9) associée à V , on a bien une solution non nulle et Ξ périodique.

□

Pour avoir un critère d'instabilité spectrale, il nous suffit donc de trouver une condition pour que la fonction d'Evans s'annule sur le demi-plan à droite des complexes. C'est l'objet des sous-parties suivantes.

2.1.3 Le critère d'instabilité spectrale pour le cas système

Le critère d'instabilité est un simple corollaire du théorème suivant que l'on retrouve dans [BGM16].

Théorème 2.1.1. *On se place dans le cas $N = 2$, la fonction d'Evans D définie précédemment vérifie*

$$D(r) \underset{r \rightarrow 0}{=} r^4 (-\det(B^{-1})) \det(\text{Hess} \Theta) + o(r^4) \quad \text{et} \quad D(r) > 0 \text{ pour } r \gg 1.$$

Corollaire 2.1.2. *Pour le cas système, $N = 2$, si $\det(\text{Hess} \Theta) < 0$ alors l'onde périodique est spectralement instable.*

Démonstration. On a que $-\det(B^{-1}) = b^2 > 0$ ainsi si $\det(\text{Hess} \Theta) < 0$ par le théorème 2.1.1 il existe un voisinage de 0 tel que pour $r \in \mathbb{R}$ dans ce voisinage $D(r) < 0$. De plus, pour $r \gg 1$, $D(r) > 0$, ainsi comme D est continue et $D(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, il existe $r > 0$ tel que

$$D(r) = 0.$$

Par la proposition 2.1.1 r est une valeur propre de \mathcal{A} dans $L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$ et donc \underline{U} est spectralement instable. \square

Pour conclure cette sous-partie, il nous faut juste prouver le théorème 2.1.1.

Démonstration. Expression de la fonction d'Evans. On commence par détailler la fonction d'Evans. Comme trouver une valeur propre de \mathcal{A} correspond à résoudre une EDO, on commence par se donner une base de solutions. On commence par l'EDO où $z = 0$. Pour cela, on remarque que si on dérive (2.1.3) par rapport à x , μ , λ_1 , λ_2 on obtient que

$$\mathbf{A}\underline{U}_x = 0, \quad \mathbf{A}\underline{U}_\mu = 0, \quad \mathbf{A}\underline{U}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}\underline{U}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.12)$$

Ce qui nous donne

$$\mathcal{A}\underline{U}_x = 0, \quad \mathcal{A}\underline{U}_\mu = 0, \quad \mathcal{A}\underline{U}_{\lambda_1} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}\underline{U}_{\lambda_2} = 0.$$

Comme \mathcal{A} est un opérateur différentiel d'ordre 1 en u et d'ordre 3 en v , il nous suffit de montrer que la famille $(\underline{U}_x, \underline{U}_\mu, \underline{U}_{\lambda_1}, \underline{U}_{\lambda_2})$ est libre. On se donne donc des coefficients $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ tels que

$$\beta_0 \underline{U}_x + \beta_1 \underline{U}_\mu + \beta_2 \underline{U}_{\lambda_1} + \beta_3 \underline{U}_{\lambda_2} = 0.$$

En appliquant l'opérateur \mathbf{A} par (2.1.12) on a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta_2 \underline{U}_{\lambda_1} + \beta_3 \underline{U}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} -\beta_2 \\ -\beta_3 \end{pmatrix},$$

ce qui donne $\beta_2 = \beta_3 = 0$.

Il nous reste à montrer que $\beta_0 = \beta_1 = 0$ sachant que $\beta_0 \underline{U}_x + \beta_1 \underline{U}_\mu = 0$. Pour cela, on utilise que \underline{U} vérifie, par la remarque 2.1.1,

$$\underline{U} \cdot \delta(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}] + \mathbf{L}(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}] = \mu. \quad (2.1.13)$$

De plus, par définition, on a

$$\mathbf{L}(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}] = \underline{U}_x \cdot \nabla_{U_x}(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}] - (\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}],$$

donc en dérivant (2.1.13) selon μ , on a

$$\underline{U}_\mu \cdot \delta(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}] + \underline{U} \cdot \mathbf{A}\underline{U}_\mu + \underline{U}_{x,\mu} \cdot \nabla_{U_x}(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}] + \underline{U}_x \cdot \partial_\mu(\nabla_{U_x}(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}]) - \partial_\mu((\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}]) = 1.$$

Or, on sait que $\mathbf{A}\underline{U}_\mu = 0$ et que

- $\underline{U}_\mu \cdot \delta(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}] = \underline{U}_\mu \cdot \nabla_U(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}] - \underline{U}_\mu \cdot \partial_x(\nabla_{U_x}(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}]),$
- $\partial_\mu((\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}]) = \underline{U}_\mu \cdot \nabla_U(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}] + \underline{U}_{x,\mu} \cdot \nabla_{U_x}(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}].$

Ce qui nous donne

$$-\underline{U}_\mu \cdot \partial_x(\nabla_{U_x}(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}]) + \underline{U}_x \cdot \partial_\mu(\nabla_{U_x}(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}]) = 1.$$

Or pour $U = (v, u)^\top$ on a $\mathcal{H}[U] = \mathcal{I}(v, u) + \mathcal{E}(v) + \frac{1}{2}\kappa(v)v_x^2$ et $Q(U) = \frac{1}{2}U \cdot B^{-1}U$. Ainsi en notant $\underline{U} = (\underline{v}, \underline{u})^\top$ on a

$$\partial_x(\nabla_{U_x}(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}]) = \partial_x \begin{pmatrix} \kappa(v)v_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \partial_\mu(\nabla_{U_x}(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}]) = \partial_\mu \begin{pmatrix} \kappa(v)v_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui nous donne

$$1 = -\underline{v}_\mu \underline{v}_{xx} \kappa(v) + \underline{v}_x \underline{v}_{x,\mu} \kappa(v).$$

Or, on sait que $\underline{v}_x(0) = 0$, $\underline{v}_{xx}(0) \neq 0$ et $\kappa > 0$ donc $\underline{v}_\mu(0) \neq 0$ ainsi, on a bien $\beta_0 = \beta_1 = 0$. Conclusion, la famille $(\underline{U}_x, \underline{U}_\mu, \underline{U}_{\lambda_1}, \underline{U}_{\lambda_2})$ est libre. En particulier, c'est une base de solutions pour l'équation $\mathcal{A}U = 0$, ce qui nous sera utile plus tard.

On fixe $z \in \mathbb{C}$ et l'objectif est de se donner une base de solution pour le problème spectral $\mathcal{A}U = zU$. Pour cela, on se donne simplement la famille de solution $U^j(\cdot; z)$ pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, où $U^j(\cdot, z)$ est la solution, pas obligatoirement périodique, de $\mathcal{A}U = zU$ avec comme donnée initiale

$$\begin{pmatrix} v^j(0; z) \\ v_x^j(0; z) \\ v_{xx}^j(0; z) \\ u^j(0; z) \end{pmatrix} = \begin{cases} (\underline{v}_x(0), \underline{v}_{xx}(0), \underline{v}_{xxx}(0), \underline{u}_x(0))^\top & \text{si } j = 1, \\ (\underline{v}_\mu(0), \underline{v}_{x,\mu}(0), \underline{v}_{xx,\mu}(0), \underline{u}_\mu(0))^\top & \text{si } j = 2, \\ (\underline{v}_{\lambda_1}(0), \underline{v}_{x,\lambda_1}(0), \underline{v}_{xx,\lambda_1}(0), \underline{u}_{\lambda_1}(0))^\top & \text{si } j = 3, \\ (\underline{v}_{\lambda_2}(0), \underline{v}_{x,\lambda_2}(0), \underline{v}_{xx,\lambda_2}(0), \underline{u}_{\lambda_2}(0))^\top & \text{si } j = 4. \end{cases}$$

Cela nous permet d'écrire la fonction d'Evans sous la forme suivante, $D(z) = E(z)/\Delta$ où on a défini

$$\Delta := \begin{vmatrix} v^1(0) & \cdots & v^4(0) \\ v_x^1(0) & \cdots & v_x^4(0) \\ v_{xx}^1(0) & \cdots & v_{xx}^4(0) \\ u^4(0) & \cdots & u^4(0) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad E(z) := \begin{vmatrix} [v^1(\cdot, z)] & \cdots & [v^4(\cdot, z)] \\ [v_x^1(\cdot, z)] & \cdots & [v_x^4(\cdot, z)] \\ [v_{xx}^1(\cdot, z)] & \cdots & [v_{xx}^4(\cdot, z)] \\ [u^1(\cdot, z)] & \cdots & [u^4(\cdot, z)] \end{vmatrix}.$$

Ici et pour le reste de la preuve, on note, pour une fonction g , $[g] = g(\Xi) - g(0)$. On peut maintenant étudier le comportement de la fonction d'Evans dans un voisinage de 0.

Comportement dans un voisinage de 0. On commence par remarquer que $\text{Hess}(Q)[\underline{U}] = B^{-1}$ et que comme $\mathcal{H}[U] = \mathcal{I}(v, u) + \mathcal{E}(v) + \frac{1}{2}\kappa(v)v_x^2$ on a

$$\mathbf{A}U = \begin{pmatrix} -\underline{\kappa}v_{xx} \\ \underline{\alpha}u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v_x \\ u \end{pmatrix}, \quad (2.1.14)$$

où on a noté $\underline{\kappa} := \kappa(v)$, $\underline{\alpha} := \partial_u^2 \mathcal{I}(u, v) > 0$ par hypothèse. Et * correspond à l'évaluation de dérivée de $\mathcal{H} + cQ$ en \underline{U} , en particulier par périodicité de \underline{U} , ses coefficients sont Ξ périodiques, tout comme $\underline{\kappa}$ et $\underline{\alpha}$. Ainsi, on a

$$[\mathbf{A}U] = \begin{pmatrix} -\underline{\kappa}(0)[v_{xx}] \\ \underline{\alpha}(0)[u] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [v] \\ [v_x] \\ [u] \end{pmatrix}.$$

Or, on sait que U^j vérifie le problème spectral (2.1.9) donc par le lemme 2.1.2 on a

$$z \int_0^{\Xi} U^j(x) dx = B \left[\mathbf{A} U^j \right] = B \left(\begin{pmatrix} -\underline{\kappa}(0)[v_{xx}^j] \\ \underline{\alpha}(0)[u^j] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [v^j] \\ [v_x^j] \\ [u^j] \end{pmatrix} \right),$$

donc

$$\begin{pmatrix} -\underline{\kappa}(0)[v_{xx}^j] \\ \underline{\alpha}(0)[u^j] \end{pmatrix} = \int_0^{\Xi} z B^{-1} U^j(x) dx - \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [v^j] \\ [v_x^j] \\ [u^j] \end{pmatrix}.$$

Ainsi en faisant des opérations sur les lignes, on obtient que

$$\begin{aligned} -\underline{\kappa}(0)\underline{\alpha}(0)E(z) &= \begin{vmatrix} [v^1(.,z)] & \cdots & [v^4(.,z)] \\ [v_x^1(.,z)] & \cdots & [v_x^4(.,z)] \\ -\underline{\kappa}(0)[v_{xx}^1(.,z)] & \cdots & -\underline{\kappa}(0)[v_{xx}^4(.,z)] \\ \underline{\alpha}(0)[u^1(.,z)] & \cdots & \underline{\alpha}(0)[u^4(.,z)] \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} [v^1(.,z)] & \cdots & [v^4(.,z)] \\ [v_x^1(.,z)] & \cdots & [v_x^4(.,z)] \\ \int_0^{\Xi} z B^{-1} U^j(x) dx & \cdots & \int_0^{\Xi} z B^{-1} U^4(x) dx \end{vmatrix} \\ &= z^2 \begin{vmatrix} \mathbf{Id}_2 & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & B^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} [v^1(.,z)] & \cdots & [v^4(.,z)] \\ [v_x^1(.,z)] & \cdots & [v_x^4(.,z)] \\ \int_0^{\Xi} U^1(x) dx & \cdots & \int_0^{\Xi} U^4(x) dx \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$E(z) = -z^2 \underline{\kappa}(0)^{-1} \underline{\alpha}(0)^{-1} \det(B^{-1}) \begin{vmatrix} [v^1(.,z)] & \cdots & [v^4(.,z)] \\ [v_x^1(.,z)] & \cdots & [v_x^4(.,z)] \\ \int_0^{\Xi} U^1(x) dx & \cdots & \int_0^{\Xi} U^4(x) dx \end{vmatrix}.$$

Or le lemme 2.1.2 nous donne aussi que

$$z \int_0^{\Xi} \nabla Q(\underline{U}(x)) \cdot U^j(x; z) dx = z B^{-1} \underline{U}(0) \cdot \int_0^{\Xi} U^j(x; z) dx - \underline{\kappa}(0) \underline{v}_{xx}(0) [v^j(., z)].$$

Ce qui nous donne, par opérations sur les lignes,

$$E(z) = z^3 \underline{\kappa}(0)^{-2} \underline{\alpha}(0)^{-1} \underline{v}_{xx}(0)^{-1} \det(B^{-1}) \begin{vmatrix} \int_0^{\Xi} \nabla Q(\underline{U}(x)) \cdot U^1(x; z) dx & \cdots & \int_0^{\Xi} \nabla Q(\underline{U}(x)) \cdot U^4(x; z) dx \\ [v_x^1(.,z)] & \cdots & [v_x^4(.,z)] \\ \int_0^{\Xi} U^1(x) dx & \cdots & \int_0^{\Xi} U^4(x) dx \end{vmatrix}.$$

Or par unicité de la solution, on a que

$$U^1(., 0) = \underline{U}_x, \quad U^2(., 0) = \underline{U}_\mu, \quad U^3(., 0) = \underline{U}_{\lambda_1} \quad \text{et} \quad U^4(., 0) = \underline{U}_{\lambda_2}.$$

De plus, si on dérive l'équation $zU^1 = \mathcal{A} U^1$ par rapport à z , et qu'on évalue en $z = 0$, on obtient que

$$\underline{U}_x = U^1(., 0) = \mathcal{A}(\partial_z U^1)(., 0).$$

Or, on sait que $\mathcal{A} \underline{U}_c = -\underline{U}_x$ donc

$$\partial_z U^1 + \underline{U}_c =: V^1 \in \ker(\mathcal{A}) = \text{Vect}(\underline{U}_x, \underline{U}_\mu, \underline{U}_{\lambda_1}, \underline{U}_{\lambda_2}).$$

Or \underline{U}_x est Ξ périodique, donc on a

$$\int_0^{\Xi} \underline{U}_x dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{\Xi} \nabla Q(\underline{U}) \cdot \underline{U}_x dx = 0.$$

Or comme on a, pour $z \rightarrow 0$, $U^1(\cdot; z) = \underline{U}_x + z(V^1 - \underline{U}_c) + \mathcal{O}(z^2)$, on obtient que

$$\int_0^{\Xi} U^1(x; z) dx = -z \int_0^{\Xi} \underline{U}_c dx + z \int_0^{\Xi} V^1 dx + \mathcal{O}(z),$$

$$\int_0^{\Xi} \nabla Q(\underline{U}) \cdot U^1 dx = -z \int_0^{\Xi} \nabla Q(\underline{U}) \cdot \underline{U}_c dx + z \int_0^{\Xi} \nabla Q(\underline{U}) \cdot V^1 dx + \mathcal{O}(z).$$

Or comme $V^1 \in \text{Vect}(\underline{U}_x, \underline{U}_\mu, \underline{U}_{\lambda_1}, \underline{U}_{\lambda_2})$ par opérations sur les lignes, on obtient

$$E(z) = -z^4 \underline{\kappa}(0)^{-2} \underline{\alpha}(0)^{-1} \underline{v}_{xx}(0)^{-1} \det(B^{-1})$$

$$\times \begin{vmatrix} \int_0^{\Xi} \nabla Q(\underline{U}) \cdot \underline{U}_c & \int_0^{\Xi} \nabla Q(\underline{U}) \cdot \underline{U}_\mu & \int_0^{\Xi} \nabla Q(\underline{U}) \cdot \underline{U}_{\lambda_1} & \int_0^{\Xi} \nabla Q(\underline{U}(x)) \cdot \underline{U}_{\lambda_2} \\ [v_{x,c}] & [v_{x,\mu}] & [v_{x,\lambda_1}] & [v_{x,\lambda_2}] \\ \int_0^{\Xi} \underline{U}_c & \int_0^{\Xi} \underline{U}_\mu & \int_0^{\Xi} \underline{U}_{\lambda_1} & \int_0^{\Xi} \underline{U}_{\lambda_2} \end{vmatrix} + \mathcal{O}(z^5).$$

On sait que $\Theta_\mu = \Xi$ et $\Theta_c = \int_0^{\Xi} Q(\underline{U}) dx$ (proposition 1 de [BGNR13]), on a pour $a \in \{\mu, \lambda_1, \lambda_2, c\}$,

$$\Theta_{ca} = \int_0^{\Xi} \nabla Q(\underline{U}) \cdot \underline{U}_a dx + \Xi_a Q(\underline{U})(\Xi) = \int_0^{\Xi} \nabla Q(\underline{U}) \cdot \underline{U}_a dx + \Theta_{\mu a} Q(\underline{U})(\Xi).$$

De même, comme $\nabla_\lambda \Theta = \int_0^{\Xi} \underline{U} dx$ (proposition 1 de [BGNR13]), on a pour $a \in \{\mu, \lambda_1, \lambda_2, c\}$,

$$\nabla_\lambda \Theta_a = \int_0^{\Xi} \underline{U}_a dx + \Xi_a \underline{U}(\Xi) = \int_0^{\Xi} \underline{U}_a dx + \Theta_{\mu a} \underline{U}(\Xi).$$

Et finalement, en dérivant $\underline{v}_x(\Xi) - \underline{v}_x(0) = 0$ par rapport à $a \in \{\mu, \lambda_1, \lambda_2, c\}$, on a $[v_{x,a}] = -\Theta_{\mu a} v_{xx}(0)$. Ainsi par opération sur les lignes

$$E(z) = z^4 \underline{\kappa}(0)^{-2} \underline{\alpha}(0)^{-1} \det(B^{-1}) \begin{vmatrix} \Theta_{cc} & \Theta_{c\mu} & \Theta_{c\lambda_1} & \Theta_{c\lambda_2} \\ \Theta_{\mu c} & \Theta_{\mu\mu} & \Theta_{\mu\lambda_1} & \Theta_{\mu\lambda_2} \\ \Theta_{\lambda_1 c} & \Theta_{\lambda_1\mu} & \Theta_{\lambda_1\lambda_1} & \Theta_{\lambda_1\lambda_2} \\ \Theta_{\lambda_2 c} & \Theta_{\lambda_2\mu} & \Theta_{\lambda_2\lambda_1} & \Theta_{\lambda_2\lambda_2} \end{vmatrix} + \mathcal{O}(z^5).$$

Ce qui nous donne

$$E(z) = z^4 \underline{\kappa}(0)^{-2} \underline{\alpha}(0)^{-1} \det(B^{-1}) \det(\text{Hess } \Theta) + \mathcal{O}(z^5).$$

Il ne reste plus qu'à étudier Δ , pour cela par opération sur les lignes, comme on a (2.1.12), (2.1.14) et $\underline{v}_x(0) = 0$, on obtient que

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{v}_x(0) & \underline{v}_\mu(0) & \underline{v}_{\lambda_1}(0) & \underline{v}_{\lambda_2}(0) \\ \underline{v}_{xx}(0) & \underline{v}_{x,\mu}(0) & \underline{v}_{x,\lambda_1}(0) & \underline{v}_{x,\lambda_2}(0) \\ \underline{v}_{xxx}(0) & \underline{v}_{xx,\mu}(0) & \underline{v}_{xx,\lambda_1}(0) & \underline{v}_{xx,\lambda_2}(0) \\ \underline{u}_x(0) & \underline{u}_\mu(0) & \underline{u}_{\lambda_1}(0) & \underline{u}_{\lambda_2}(0) \end{vmatrix} = -\underline{\kappa}(0)^{-1} \underline{\alpha}(0)^{-1} \begin{vmatrix} 0 & \underline{v}_\mu(0) & \underline{v}_{\lambda_1}(0) & \underline{v}_{\lambda_2}(0) \\ \underline{v}_{xx}(0) & \underline{v}_{x,\mu}(0) & \underline{v}_{x,\lambda_1}(0) & \underline{v}_{x,\lambda_2}(0) \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{\kappa}(0)^{-1} \underline{\alpha}(0)^{-1} \underline{v}_{xx}(0) \underline{v}_\mu(0).$$

Or, on sait que $-\underline{v}_\mu(0) \underline{v}_{xx}(0) \underline{\kappa}(0) = 1$, ce qui donne $\Delta = -\underline{\kappa}(0)^{-2} \underline{\alpha}(0)^{-1}$. Ce qui nous permet bien de conclure

$$D(z) \underset{z \rightarrow 0}{=} z^4 (-\det(B^{-1})) \det(\text{Hess } \Theta) + o(z^4).$$

Comportement au voisinage de l'infini. La difficulté provient du fait que \mathcal{A} est à coefficients non constants donc il est difficile de calculer sa fonction d'Evans. Par un argument d'homotopie, on va donc ramener l'étude du signe de $D(r)$ pour r grand, à celui de $D_0(r)$, où D_0 est la fonction d'Evans lié à un opérateur \mathcal{A}_0 qui est plus simple. Pour cela, on pose pour $\eta \in [0, 1]$,

$$\mathcal{A}_\eta := \tilde{B}_\eta \partial_x \text{Hess } \tilde{\mathcal{H}}_\eta[U],$$

où on a défini

- $\tilde{\mathcal{H}}[U] = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v_x^2$ et $\tilde{\mathcal{H}}_\eta = \eta\mathcal{H} + (1-\eta)\tilde{\mathcal{H}}$,
- $\tilde{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ et $\tilde{B}_\eta^{-1} = \eta B^{-1} + (1-\eta)\tilde{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \eta a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

De plus, on note D_η la fonction d'Evans associée à \mathcal{A}_η , en particulier $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ et $D_1 = D$.
Pour l'instant, on admet le fait suivant

$$\exists R > 0, \forall r \geq R, \forall \eta \in [0, 1], D_\eta(r) \neq 0. \quad (2.1.15)$$

Comme les solutions d'une EDO dépendent continûment des paramètres, pour $r \in \mathbb{R}$, $\eta \mapsto D_\eta(r)$ est continue. Ainsi pour $r \geq R$, $D(r)$ est du même signe que $D_0(r)$. Il nous suffit donc de trouver son signe. Or, on sait que

$$\mathcal{A}_0 := \tilde{B} \partial_x \text{Hess } \tilde{\mathcal{H}}[U], \quad \tilde{\mathcal{H}}[U] = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v_x^2 \text{ et } \tilde{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc $(\text{Hess } \tilde{\mathcal{H}}[U]U)_1 = -\partial_x(v_x)$ et $(\text{Hess } \tilde{\mathcal{H}}[U]U)_2 = u$, ce qui nous donne

$$zU = \mathcal{A}_0 U \iff z\tilde{B}^{-1}U = \partial_x(\text{Hess } \tilde{\mathcal{H}}[U]U) \iff \begin{cases} zbu = -\partial_x^3 v \\ zbv = \partial_x u \end{cases}$$

En récrivant ce système, comme un système d'EDO d'ordre 1 on obtient

$$\partial_x \begin{pmatrix} v \\ v_x \\ v_{xx} \\ u \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} v \\ v_x \\ v_{xx} \\ u \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -zb \\ zb & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc une expression pour la fonction d'Evans associée qui est $D_0(z) = \det(e^{\Xi A(z)} - \text{Id})$. Pour $r \in]0, +\infty[$, les valeurs propres de $A(r)$ sont $\left\{ \pm(1 \pm i)\sqrt{\frac{r|b|}{2}} \right\}$, ainsi $A(r)$ est diagonalisable et on a

$$\begin{aligned} D_0(r) &= \left(e^{\Xi(1+i)\sqrt{\frac{r|b|}{2}}} - 1 \right) \left(e^{-\Xi(1+i)\sqrt{\frac{r|b|}{2}}} - 1 \right) \left(e^{\Xi(1-i)\sqrt{\frac{r|b|}{2}}} - 1 \right) \left(e^{-\Xi(1-i)\sqrt{\frac{r|b|}{2}}} - 1 \right) \\ &= \left| e^{\Xi(1+i)\sqrt{\frac{r|b|}{2}}} - 1 \right|^2 \left| e^{-\Xi(1+i)\sqrt{\frac{r|b|}{2}}} - 1 \right|^2 > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien que pour $r \geq R$, $D(r) > 0$.

Il nous reste juste à montrer (2.1.15). Or, on a que pour $\eta \in [0, 1]$,

$$\tilde{\mathcal{H}}_\eta[U] = \mathcal{I}_\eta(v, u) + \mathcal{E}_\eta(v, v_x) \quad \text{et} \quad \tilde{B}_\eta^{-1} = \begin{pmatrix} \eta a & b \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

où $\mathcal{I}_\eta(v, u) = \eta\mathcal{I}(v, u) + (1-\eta)\frac{1}{2}u^2$ et $\mathcal{E}_\eta(v, v_x) = \eta\mathcal{E}(v, v_x) + (1-\eta)\frac{1}{2}v_x^2$.

On peut donc oublier η et montrer le résultat en supposant que b est fixée, a est une fonction bornée de η et que $\underline{\kappa} = \partial_{v_x}^2 \mathcal{E}(v, v_x)$, $\underline{\alpha} = \partial_u^2 \mathcal{I}(v, u)$ soient bornées, positives et minorées loin de 0.

On va utiliser des estimations à priori. Soit $r > 0$ et $U = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ une solution Ξ périodique du problème spectral (2.1.9) avec $z = r$. Alors U vérifie

$$\begin{cases} \partial_x(Mv + \underline{\beta}v + \underline{\gamma}u) + c\partial_x(av + bu) = r(av + bu), \\ \partial_x(\underline{\gamma}v + \underline{\alpha}u) + cb\partial_x(v) = rbv, \end{cases}$$

où on a $M := \text{Hess } \mathcal{E}[v] = -\partial_x \underline{\kappa} \partial_x + \underline{q}$ avec \underline{q} bornée et $\underline{\beta} := \partial_v^2 \mathcal{F}(v, u)$, $\underline{\gamma} := \partial_{uv}^2 \mathcal{F}(v, u)$ sont bornées.

On commence par prendre le produit scalaire de ce système avec $B \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$, on obtient

$$\frac{u}{b} \partial_x (Mv + \underline{\beta}v + \underline{\gamma}u) + \frac{uc}{b} \partial_x (av + bu) + \left(\frac{v}{b} - a \frac{u}{b} \right) \partial_x (\underline{\gamma}v + \underline{\alpha}u) + cb \partial_x (v) \left(\frac{v}{b} - a \frac{u}{b} \right) = ru^2 + rv^2.$$

Puis en intégrant sur $[0, \Xi]$, utilisant des intégrations par parties et que U est périodique de période Ξ on obtient que

$$r (\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2) = \frac{1}{b} \int_0^\Xi u_x \partial_x (\underline{\kappa} v_x) + u \partial_x ((\underline{q} + \underline{\beta})v + \underline{\gamma}u) + (v - \frac{a}{b}u) \partial_x (\underline{\gamma}v + \underline{\alpha}u) dx.$$

En utilisant que $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$r (\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2) \leq C (\|u\|_{H^1}^2 + \|v\|_{H^2}^2), \quad (2.1.16)$$

où C dépend seulement des bornes sur $a, \underline{\kappa}, \underline{q}, \underline{\alpha}, \underline{\beta}$ et $\underline{\gamma}$.

Maintenant, on prend le produit scalaire du système avec $\begin{pmatrix} v_x \\ u_x \end{pmatrix}$, puis on intègre sur une période et on obtient après intégration par parties que

$$rb \int_0^\Xi (uv_x + vu_x) = \int_0^\Xi v_{xx} \partial_x (\underline{\kappa} v_x) + v_x \partial_x ((\underline{q} + \underline{\beta})v + \underline{\gamma}u) + u_x \partial_x (\underline{\gamma}v + \underline{\alpha}u) + cav_x^2 + 2cbu_x v_x dx.$$

Par périodicité de U et intégration par parties, on obtient

$$0 = \int_0^\Xi v_{xx}^2 \underline{\kappa} + u_x^2 \underline{\alpha} dx + \int_0^\Xi \underline{\kappa}_x v_{xx} v_x - \underline{\gamma} v_{xx} u + v_x \partial_x ((\underline{q} + \underline{\beta} + ac)v) + u_x \partial_x ((\underline{\gamma} + 2bc)v) - \frac{1}{2} u^2 \alpha_{xx} dx.$$

De plus en utilisant que pour tout $\varepsilon \neq 0$, $|ab| \leq \frac{\varepsilon^2}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} b^2$ et que $\underline{\kappa} > 0$, $\underline{\alpha}_0 > 0$ on a

$$0 \geq \frac{1}{2} \int_0^\Xi v_{xx}^2 \underline{\kappa} + u_x^2 \underline{\alpha} dx - \int_0^\Xi \underline{\kappa}_x \frac{v_x^2}{2\underline{\kappa}} + \underline{\gamma}^2 \frac{u^2}{\underline{\kappa}} + \frac{1}{2\underline{\alpha}} (\partial_x (\underline{\gamma}v + 2bcv))^2 + \frac{1}{2} v_x^2 + \frac{1}{2} (\partial_x (\underline{q} + \underline{\beta} + ac)v)^2 + \frac{1}{2} u^2 \alpha_{xx} dx$$

Ainsi, il existe une constante $C' > 0$ qui dépend des bornes sur $a, \underline{\kappa}, \underline{\kappa}_x, \underline{q}, \underline{\alpha}, \underline{\alpha}_{xx}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}$ et $\underline{\gamma}_x$ tel que

$$C' (\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{H^1}^2) \geq \frac{1}{2} \int_0^\Xi v_{xx}^2 \underline{\kappa} + u_x^2 \underline{\alpha} dx \geq \frac{1}{2} \min(\underline{\kappa}, \underline{\alpha}) (\|v\|_{H^2}^2 + \|u\|_{H^1}^2).$$

Pour conclure, on utilise l'inégalité de Kolmogorov dans H^2 ,

$$C' \|v_x\|_{L^2}^2 \leq C' \|v\|_{L^2} \|v\|_{H^2} \leq \frac{1}{4} \min(\underline{\kappa}, \underline{\alpha}) \|v\|_{H^2}^2 + C'' \|v\|_{L^2},$$

où $C'' > 0$ est une constante ne dépendant uniquement de C' et des bornes sur $\underline{\kappa}$.

On a donc une constante $K > 0$ qui ne dépend que des bornes sur $a, \underline{\kappa}, \underline{\kappa}_x, \underline{q}, \underline{\alpha}, \underline{\alpha}_{xx}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}$ et $\underline{\gamma}_x$ tel que

$$\|u\|_{H^2}^2 + \|v\|_{H^1}^2 \leq K (\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2). \quad (2.1.17)$$

Si on réunit (2.1.16) et (2.1.17), on obtient que

$$r (\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2) \geq CK (\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2).$$

Ainsi si $r > CK$, alors $U = 0$ et donc r n'est pas une valeur propre de \mathcal{A} donc $D(r) \neq 0$, ce qui conclut complètement cette preuve. \square

2.1.4 Critère d'instabilité spectrale pour le cas scalaire

Comme pour le cas système, il nous le critère d'instabilité est un simple corollaire du théorème suivant où on regarde le comportement asymptotique de la fonction d'Evans.

Théorème 2.1.3. *On se place dans le cas $N = 1$, la fonction d'Evans D définie précédemment vérifie*

$$D(r) \underset{r \rightarrow 0}{=} r^3 \det(\text{Hess } \Theta) + o(r^3) \quad \text{et} \quad D(r) < 0 \text{ pour } r \gg 1.$$

Comme précédemment, on en déduit de ce théorème le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.4. *Pour le cas scalaire, $N = 1$, si $\det(\text{Hess } \Theta) > 0$ alors l'onde périodique est spectralement instable.*

Démonstration. La preuve est identique au cas $N = 2$. Elle utilise seulement le théorème des valeurs intermédiaires. \square

Il nous reste à donner la preuve du théorème.

Démonstration. La preuve est identique au cas $N = 2$, il nous faut juste expliquer d'où viennent les changements de signes.

Comportement au voisinage de 0. Si $N = 1$, on a

$$\mathbf{A}\underline{U}_x = 0, \quad \mathbf{A}\underline{U}_\mu = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{A}\underline{U}_\lambda = -1.$$

On peut alors montrer que la famille $(\underline{U}_x, \underline{U}_\mu, \underline{U}_\lambda)$ est libre. Comme lorsque $N = 2$, on se donne une base de solution du problème spectral $\mathcal{A}U = zU$, $U^j(\cdot; z)$ pour $j \in \{1, 2, 3\}$, en considérant $U^j(\cdot, z)$ la solution de $\mathcal{A}U = zU$ avec comme donnée initiale

$$\begin{pmatrix} v^j(0; z) \\ v_x^j(0; z) \\ v_{xx}^j(0; z) \\ u^j(0; z) \end{pmatrix} = \begin{cases} \left(\underline{v}_x(0), \underline{v}_{xx}(0), \underline{v}_{xxx}(0) \right)^T & \text{si } j = 1, \\ \left(\underline{v}_\mu(0), \underline{v}_{x,\mu}(0), \underline{v}_{xx,\mu}(0) \right)^T & \text{si } j = 2, \\ \left(\underline{v}_{\lambda_1}(0), \underline{v}_{x,\lambda_1}(0), \underline{v}_{xx,\lambda_1}(0) \right)^T & \text{si } j = 3. \end{cases}$$

On a toujours $D(z) = E(z)/\Delta$ avec

$$E(z) = \begin{vmatrix} [v^1(\cdot, z)] & [v^2(\cdot, z)] & [v^3(\cdot, z)] \\ [v_x^1(\cdot, z)] & [v_x^2(\cdot, z)] & [v_x^3(\cdot, z)] \\ [v_{xx}^1(\cdot, z)] & [v_{xx}^2(\cdot, z)] & [v_{xx}^3(\cdot, z)] \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta := \begin{vmatrix} v^1(0) & v^2(0) & v^3(0) \\ v_x^1(0) & v_x^2(0) & v_x^3(0) \\ v_{xx}^1(0) & v_{xx}^2(0) & v_{xx}^3(0) \end{vmatrix}.$$

En utilisant que,

$$\mathbf{A}U = -\underline{\kappa}v_{xx} + \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v_x \end{pmatrix}, \quad (2.1.18)$$

on peut montrer, exactement comme en pour le cas système, que

$$E(z) = z^3 \underline{\kappa}(0)^{-2} \det(\text{Hess } \Theta) + \mathcal{O}(z^4).$$

Et pour Δ on a

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \underline{v}_x(0) & \underline{v}_\mu(0) & \underline{v}_\lambda(0) \\ \underline{v}_{xx}(0) & \underline{v}_{x,\mu}(0) & \underline{v}_{x,\lambda}(0) \\ \underline{v}_{xxx}(0) & \underline{v}_{xx,\mu}(0) & \underline{v}_{xx,\lambda}(0) \end{vmatrix} = -\underline{\kappa}(0)^{-1} \begin{vmatrix} 0 & \underline{v}_\mu(0) & \underline{v}_\lambda(0) \\ \underline{v}_{xx}(0) & \underline{v}_{x,\mu}(0) & \underline{v}_{x,\lambda}(0) \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -\underline{\kappa}(0)^{-1} \underline{v}_{xx}(0) \underline{v}_\mu(0) \\ &= \underline{\kappa}(0)^{-2} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient bien que

$$D(z) \underset{z \rightarrow 0}{=} z^3 \det(\text{Hess } \Theta) + o(z^3).$$

Comportement au voisinage de l'infini. L'autre changement de signe vient du fait que lorsque que l'on regarde le signe de la fonction d'Evans pour le problème simplifié, on résout

$$r v = -\partial_x^3 v \iff \partial_x \begin{pmatrix} v \\ v_x \\ v_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -r & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v_x \\ v_{xx} \end{pmatrix}.$$

Or les valeurs propres de la matrice étant, $(-r^{1/3}, e^{i\pi/3} r^{1/3}, e^{-i\pi/3} r^{1/3})$ on a

$$\text{sign}(D(r)) = \text{sign} \left((e^{-r^{1/3}} - 1) \left| e^{i\pi/3} r^{1/3} - 1 \right|^2 \right) < 0,$$

pour r assez grand. Ce qui conclut cette preuve. □

Remarque 2.1.2. *Pour conclure cette partie, on va juste écrire les conclusions des corollaires 2.1.2 et 2.1.4 de la même manière. Pour cela, on remarque que si Hess Θ est inversible, si on note $n(\text{Hess } \Theta)$ le nombre de valeurs propres négatives, alors si $n(\text{Hess } \Theta) - N$ est impair, on a $\det(\text{Hess } \Theta) > 0$ si $N = 1$ et $\det(\text{Hess } \Theta) < 0$ si $N = 2$. Ainsi, pour les deux dimensions, on peut récrire les conclusions des corollaires comme étant*

- *si Hess(θ) est inversible et $n(\text{Hess } \Theta) - N$ est impair alors l'onde périodique et linéairement instable.*

On peut maintenant chercher une condition nécessaire pour que l'onde soit stable au niveau du non-linéaire, c'est l'objectif de la sous-partie suivante.

2.2 Critère de stabilité orbitale

On s'intéresse maintenant à la stabilité orbitale, on reprend la partie 4 de [BGM16].

2.2.1 Problème abstrait et hypothèses

On s'intéresse toujours à une équation de la forme

$$\partial_t U = \partial_x (B \delta \mathcal{H}[U]). \tag{2.2.1}$$

On sait que les ondes progressives périodiques \underline{U} sont paramétrées par (μ, λ, c) et vérifie

$$\delta(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}] + \lambda = 0 \text{ et } L(\mathcal{H} + cQ + \lambda \cdot)[\underline{U}] = \mu.$$

L'objectif va être d'étudier la stabilité, au niveau du non-linéaire, autour de telles ondes. Plus précisément, on va s'intéresser à la stabilité orbitale co-périodique, c'est-à-dire dû à des perturbations de même période. La définition précise de stabilité que nous allons utiliser est la suivante.

Définition 2.2.1. *Soit \underline{U} une onde périodique de période Ξ et H un espace de fonction Ξ -périodique. On dit que \underline{U} est conditionnellement co-périodiquement orbitalement stable dans H si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $U_0 \in H$ qui vérifie $\|U_0 - \underline{U}\|_H \leq \eta$, si on note T le temps maximal d'existence de la solution $U: t \rightarrow U(t) \in H$ de (2.2.1) avec $U(0) = U_0$, alors*

$$\forall t \in [0, T[, \quad \inf_{s \in \mathbb{R}} \|U(t, \cdot) - \underline{U}(\cdot + s)\|_H \leq \varepsilon.$$

Remarque 2.2.1. On utilise le terme orbital, car à t fixé $u(t)$ est proche de l'orbite de \underline{U} sous l'action des symétries du problème, ici les translations. Cette notion est cohérente avec le fait que l'équation est invariante par translation, une solution translatée reste une solution. Il nous faut donc prendre en compte cette invariance pour la stabilité. Plus généralement, si on considère une équation invariante sous l'action d'un groupe de symétrie, alors pour la stabilité, il faudra considérer l'action de tout le groupe de symétrie.

Remarque 2.2.2. Sur les dénominations "co-périodique" et "conditionnelle" on peut faire les remarques suivantes.

- Le caractère co-périodique provient du fait que l'on ne s'intéresse qu'à des perturbations de même période que l'onde périodique de départ. Ainsi dans l'espace fonctionnelle que l'on regarde, H , il n'y a que des fonctions Ξ périodiques.
- Le caractère conditionnel vient du fait que l'on ne montre pas que le temps d'existence est $+\infty$. On montre seulement que, temps que la solution existe, elle reste proche de l'orbite de \underline{U} . Mais comme on n'a pas forcément le caractère bien posé en temps petit dans, H on ne peut conclure sur le temps d'existence de la solution.

Il nous faut tout d'abord comprendre qu'elles sont les quantités conservées. On rappelle que toute solution U , suffisamment régulière, de (2.2.1), vérifie des lois de conservations en plus qui sont

$$\partial_t Q(U) = \partial_x (U \cdot \delta \mathcal{H}[U] + L \mathcal{H}[U]) \quad (2.2.2)$$

et

$$\partial_t \mathcal{H}[U] = \partial_x \left(\frac{1}{2} \delta \mathcal{H}[U] \cdot B \delta \mathcal{H}[U] + \nabla_{U_x} \mathcal{H}[U] \cdot \partial_x (B \delta \mathcal{H}[U]) \right). \quad (2.2.3)$$

Par intégration des lois de conservation (2.2.1), (2.2.2) et (2.2.3), si U est une solution suffisamment régulière et Ξ périodique, on a

$$\frac{d}{dt} \int_0^\Xi U dx = 0, \quad \frac{d}{dt} \int_0^\Xi Q(U) dx = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \int_0^\Xi \mathcal{H}[U] dx = 0.$$

L'objectif est donc de se placer dans un espace fonctionnel où ces quantités sont bien définies, ainsi, elles seront conservées le long des trajectoires. Pour l'impulsion, comme $Q(U) = \frac{1}{2} U \cdot B^{-1} U$, il suffit que U soit L^2 pour qu'elle soit bien définie. La contrainte provient donc de l'hamiltonien \mathcal{H} , on introduit donc la notion d'espace d'énergie.

Définition 2.2.2. Pour $\Xi > 0$ on dit que \mathbb{H}_Ξ est un espace d'énergie si, c'est une partie dense de $(L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))^N$, et si

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_\Xi &\longrightarrow \mathbb{R} \\ U &\longmapsto \int_0^\Xi \mathcal{H}[U] dx, \end{aligned}$$

est de classe \mathcal{C}^2 .

Remarque 2.2.3. Dans la famille d'équation que l'on regarde il y en a trois principales (qKdV), (EKE) et (EKL). Pour (qKdV), $N = 1$ et il faut penser l'espace d'énergie comme étant $\mathbb{H}_\Xi = H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$. Et pour (EKE) et (EKL), $N = 2$, il faut penser l'espace d'énergie comme étant $\mathbb{H}_\Xi = H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}) \times L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$. On donnera plus de détail dans la sous-partie 2.3.

On a maintenant tous les outils pour pouvoir énoncer les hypothèses que l'on fait sur le problème général.

Hypothèse 2.2.1. Il existe un ouvert Ω de \mathbb{R}^{N+2} et une famille d'onde périodique \underline{U} paramétrée par (λ, μ, c) tel que \underline{U} vérifie

$$\delta(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}] + \lambda = 0 \quad \text{et} \quad L(\mathcal{H} + cQ + \lambda \cdot)[\underline{U}] = \mu. \quad (2.2.4)$$

De plus, l'application, $(\mu, \lambda, c) \in \Omega \longrightarrow (\underline{U}, \Xi) \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 , où Ξ est la période de \underline{U} .

Hypothèse 2.2.2. On demande que pour $(\mu, \lambda, c) \in \Omega$, on a $\partial_\mu \Xi \neq 0$.

De plus, on demande que l'action,

$$\Theta(\mu, \lambda, c) = \int_0^\Xi (\mathcal{H}[U] + cQ(U) + \lambda \cdot U + \mu) dx,$$

est telle que

$$C := \frac{\tilde{\nabla} \Theta_\mu \otimes \tilde{\nabla} \Theta_\mu}{\Theta_{\mu\mu}} - \tilde{\nabla}^2 \Theta,$$

soit inversible pour $(\mu, \lambda, c) \in \Omega$, où $\tilde{\nabla} = \begin{pmatrix} \nabla \lambda \\ \partial_c \end{pmatrix}$.

Hypothèse 2.2.3. Pour tout $(\mu, \lambda, c) \in \Omega$ et $\Xi = \Xi(\mu, \lambda, c)$, il existe $\mathbb{H}_\Xi \subset (L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))^N$ un espace d'énergie. De plus, on suppose que si on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité entre \mathbb{H}'_Ξ et \mathbb{H}_Ξ , alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\|U\|_{\mathbb{H}_\Xi}^2 = \langle \text{Hess } \mathcal{H}[U]U, U \rangle + \alpha \|U\|_{L^2}^2,$$

définie une norme équivalente sur \mathbb{H}_Ξ , uniformément en (μ, λ, c) .

On demande aussi que le spectre de $\mathbf{A} := \text{Hess}(\mathcal{H} + cQ)[U]$ admette un nombre fini de valeurs propres négatives $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n(\mathbf{A})})$ et que $\sigma(\mathbf{A}) \setminus \{0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n(\mathbf{A})}\}$ est borné loin de zéro, uniformément en (μ, λ, c) .

Hypothèse 2.2.4. Pour tout $(\mu, \lambda, c) \in \Omega$ et $\Xi = \Xi(\mu, \lambda, c)$, il existe un sous-espace \mathbb{W}_Ξ de \mathbb{H}_Ξ où le problème de Cauchy est localement bien posé.

2.2.2 Stabilité orbitale co-périodique

On va montrer la stabilité en cherchant un critère de Grillakis-Shatah-Strauss. C'est-à-dire une condition pour que la fonctionnelle

$$\mathcal{F}[U; \mu, \lambda, c] = \int_0^\Xi \mathcal{H}[U] + cQ(U) + \lambda \cdot U + \mu dx,$$

admette un minimum local en \underline{U} et qu'elle puisse être utilisée comme une fonction de Lyapunov sur l'espace dit des *états admissibles*. De tels critères ont été introduits dans [GSS87] pour l'étude de la stabilité des ondes solitaires. Pour les solitons, la dérivée seconde selon la vitesse du moment de Boussinesq à l'état final fixé, est un tel critère. On retrouve ces résultats dans [AP09] et [KP13]. Pour une étude générale de cette méthode, on peut se référer à [DBGN15]. Le théorème est une adaptation de cette théorie aux ondes périodiques et provient de [BGM16].

Théorème 2.2.1. On suppose les hypothèses 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 et 2.2.4 vérifiées.

Alors pour tout $(\mu, \lambda, c) \in \Omega$ tel que

i $n(\mathbf{A}) = n(C)$, où $n(\cdot)$ compte le nombre de valeurs propres négatives,

ii $\ker(\mathbf{A})$ est engendré par \underline{U}_x ,

l'onde progressive $\underline{U}^{\mu, \lambda, c}$ est conditionnellement, co-périodiquement, orbitalement stable, dans le sens suivant.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $U_0 \in \mathbb{W}_\Xi$ qui vérifie $\|U_0 - \underline{U}\|_{\mathbb{H}_\Xi} \leq \eta$, si on note T le temps maximal d'existence de la solution $U: t \rightarrow U(t) \in \mathbb{W}_\Xi$ avec $U(0) = U_0$, alors

$$\forall t \in [0, T], \quad \inf_{s \in \mathbb{R}} \|U(t, \cdot) - \underline{U}(\cdot + s)\|_{\mathbb{H}_\Xi} \leq \varepsilon.$$

Remarque 2.2.4. Comme dit précédemment, le résultat est conditionnel, car à ce niveau de généralité, on n'a pas le caractère bien posé pour des temps petits dans l'espace d'énergie. Dans la sous-partie suivante, on discutera dans notre cas des hypothèses *i* et *ii*. Le point *ii* est toujours vérifié. Pour le point *i*, on appelle la quantité $n(\mathbf{A}) - n(\mathbf{C})$, l'indice de stabilité. En effet, c'est lui qui doit s'annuler pour montrer la stabilité des ondes périodiques. On montrera dans la sous-partie suivante que, dans notre cas, grâce à la théorie de Sturm-Liouville, on peut montrer que

$$n(\mathbf{A}) - n(\mathbf{C}) = n(\text{Hess } \Theta) - N.$$

Ceci nous permet de lier la matrice $\text{Hess } \theta$ à la stabilité orbitale des ondes périodiques, sachant que l'on sait déjà qu'elle est liée à l'instabilité spectrale de telle onde, voir le théorème 2.1.2.

Remarque 2.2.5. Ici, on essaye de montrer la stabilité orbitale sans supposer ou utiliser la stabilité spectrale du linéaire. Comme on l'a vu dans la sous-partie précédemment, au mieux on a que le spectre du linéaire est inclus dans $i\mathbb{R}$ et donc on ne gagne pas de décroissance exponentielle. Comme en dimension finie, il nous faut ajouter des conditions pour passer à la stabilité du non-linéaire. On peut le faire en étudiant la signature de Krein des différentes valeurs propres et sous une certaine condition dessus, on peut annuler l'indice de stabilité et donc conclure, comme nous, à la stabilité orbitale co-périodique. C'est notamment détaillé dans le chapitre 7 de [KP13] et est utilisé dans [KD15] pour étudier la stabilité co-périodique des ondes périodiques de (mKdV).

Ce phénomène, de spectre au mieux imaginaire pure, arrive aussi en dimension finie. Si on regarde une EDO hamiltonienne, le spectre du linéarisé autour d'une constante vérifie cette contrainte. Pour les constantes d'équilibres où on peut conclure à leur stabilité, on utilise les quantités conservées, donc l'hamiltonien, comme fonction de Lyapunov.

Idée de la preuve. On résume les arguments de la preuve qui est donnée dans [BGMR16]. Comme on ne s'intéresse qu'à des perturbations de même période, Ξ , que l'onde périodique \underline{U} , on sait que les quantités suivantes sont conservées au cours du temps

$$\int_0^\Xi U \, dx, \quad \int_0^\Xi Q(U) \, dx \quad \text{et} \quad \int_0^\Xi \mathcal{H}[U] \, dx.$$

Cela nous motive à définir la fonctionnelle suivante, qui est donc conservée au cours du temps

$$\mathcal{F}[U; \mu, \lambda, c] = \int_0^\Xi \mathcal{H}[U] + cQ(U) + \lambda \cdot U + \mu \, dx.$$

L'action pour l'onde périodique $\underline{U} := \underline{U}^{\mu, \lambda, c}$ est alors simplement

$$\Theta(\mu, \lambda, c) = \mathcal{F}[\underline{U}; \mu, \lambda, c] = \int_0^\Xi \mathcal{H}[\underline{U}] + cQ(\underline{U}) + \lambda \cdot \underline{U} + \mu \, dx.$$

Comme pour les EDO, pour conclure à de la stabilité, on aimerait que $\mathcal{F}[\cdot; \mu, \lambda, c]$ soit une fonction de Lyapunov. Comme \mathcal{F} est conservée le long des trajectoires il nous suffirait de montrer qu'elle admet bien un minimum local en \underline{U} . Or par les hypothèses \mathcal{F} est au moins de classe \mathcal{C}^2 , il nous suffit donc de montrer que l'opérateur auto-adjoint

$$\mathbf{A} = \text{Hess}(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}]$$

est défini positif.

Or ceci est impossible, en effet \mathbf{A} admet un noyau non trivial. En effet, si on dérive selon x la première équation de (2.2.4), on obtient

$$\text{Hess}(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}]\underline{U}_x = \mathbf{A}\underline{U}_x = 0.$$

Plus généralement, rien n'empêche \mathbf{A} d'avoir des valeurs propres négatives. Or ce n'est pas perdu car, dû aux quantités conservées, la solution U , qui a pour donnée initiale U_0 , vit dans une sous-variété de l'espace d'énergie \mathbb{H}_Ξ , qui est donnée par

$$\mathcal{C} = \left\{ U \in \mathbb{H}_\Xi; \int_0^\Xi U_0 \, dx = \int_0^\Xi U \, dx, \int_0^\Xi Q(U_0) \, dx = \int_0^\Xi Q(U) \, dx \right\}.$$

Or la stabilité orbitale étant une condition ouverte, on peut montrer que si U_0 est suffisamment proche de \underline{U} , il nous suffit de montrer le résultat pour des paramètres μ, λ, c tel que

$$\int_0^\Xi U_0 dx = \int_0^\Xi \underline{U} dx \quad \text{et} \quad \int_0^\Xi Q(U_0) dx = \int_0^\Xi Q(\underline{U}) dx.$$

C'est-à-dire que U vit sur la sous-variété

$$\mathcal{C} = \left\{ U \in \mathbb{H}_\Xi; \int_0^\Xi U dx = \int_0^\Xi \underline{U} dx, \int_0^\Xi Q(U) dx = \int_0^\Xi Q(\underline{U}) dx \right\}.$$

Ainsi si on arrive à montrer que $\mathcal{F}[:, \mu, \lambda, c]$ admet un minimum local en \underline{U} sur \mathcal{C} , alors par un argument classique de fonction de Lyapunov on obtient la stabilité. Pour minimiser \mathcal{F} sur la sous-variété, on utilise un développement de Taylor qui nous donne que si \mathbf{A} est définie positif sur le plan tangent de \mathcal{C} en \underline{U} alors \underline{U} est un minimum local.

Ici le plan tangent est défini par

$$\mathbb{T}_{\underline{U}} \mathcal{C} = \left\{ U \in (L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))^N; \int_0^\Xi U dx = 0, \int_0^\Xi U \cdot \nabla Q(\underline{U}) dx = 0 \right\}.$$

C'est cette espace que l'on appelle l'espace des *états admissibles*. Il nous faut donc nous assurer que les conditions que l'on suppose vraies permettent que \mathbf{A} soit défini positif sur $\mathbb{T}_{\underline{U}} \mathcal{C}$. C'est-à-dire que l'on a bien affaire à un critère de Grillakis-Shatah-Strauss. Pour cela, il nous faut montrer que sur $\mathbb{T}_{\underline{U}} \mathcal{C}$, \mathbf{A} n'a pas de valeurs propres négatives ni de noyau.

Pour les valeurs propres négatives, le théorème 3 de [BGNR13], nous dit que

$$n(\mathbf{A}) = n(\mathbf{A}_{\mathbb{T}_{\underline{U}} \mathcal{C}}) + n(C),$$

où C est la matrice définie à l'hypothèse 2.2.2.

Ainsi notre hypothèse nous donne clairement que \mathbf{A} n'admet pas de valeurs propres négatives sur $\mathbb{T}_{\underline{U}} \mathcal{C}$. Il nous suffit de regarder son noyau.

En utilisant que $\ker[\mathbf{A}] = \text{Vect}[\underline{U}_x]$ et l'invariance par translation, on peut montrer qu'au premier ordre $U - \underline{U}$ reste dans l'orthogonal du noyau de \mathbf{A} . Pour cela, on note pour $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{U}_\varepsilon = \left\{ U \in \mathbb{H}_\Xi; \inf_{s \in \mathbb{R}} \|U - \underline{U}(\cdot + s)\|_{\mathbb{H}_\Xi} \leq \varepsilon \right\}$$

et on donne le lemme dont la preuve originelle se trouve dans [GSS87] (lemme 3.2).

Lemme 2.2.1. *On a les points suivant.*

i Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une fonction de classe \mathcal{C}^1 , $\tau: \mathbb{U}_{\varepsilon_0} \mapsto \mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}$ tel que pour tout $U \in \mathbb{U}_{\varepsilon_0}$,

$$\int_0^\Xi (U(x + \tau(U)) - \underline{U}(x)) \cdot \underline{U}_x(x) dx = 0, \quad \|U(\cdot + \tau(U)) - \underline{U}\|_{\mathbb{H}_\Xi} \leq \varepsilon_0$$

et

$$\|U(\cdot + \tau(U)) - \underline{U}\|_{\mathbb{H}_\Xi} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \inf_{s \in \mathbb{R}} \|U - \underline{U}(\cdot + s)\|_{\mathbb{H}_\Xi} \rightarrow 0.$$

ii Pour $U \in \mathbb{U}_{\varepsilon_0} \cap \mathcal{C}$, il existe $\tilde{V} \in \mathbb{T}_{\underline{U}} \mathcal{C}$ tel que

$$\int_0^\Xi \tilde{V} \cdot \underline{U}_x dx = 0 \quad \text{et} \quad U(\cdot + \tau(U)) - \underline{U} = \tilde{V} + o\left(\|U(\cdot + \tau(U)) - \underline{U}\|_{\mathbb{H}_\Xi}\right).$$

Ce qui nous permet d'utiliser \mathcal{F} comme une fonction de Lyapunov sur \mathcal{C} est de conclure à la stabilité orbitale. \square

Pour finir cette sous-partie, on peut faire un lien général entre $n(C)$ et $n(\text{Hess}\Theta)$. C'est la proposition suivante.

Proposition 2.2.1. *Il existe une application continue $P: \Omega \rightarrow$ telle que*

$$P \text{Hess}\Theta P^T = \begin{pmatrix} \Theta_{\mu\mu} & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix}.$$

Ainsi si $\Theta_{\mu\mu} \neq 0$ et $\text{Hess}\Theta$ inversible alors, on a l'alternative suivante.

- si $\Theta_{\mu\mu} > 0$ alors $n(\text{Hess}\Theta) = n(-C)$,
- si $\Theta_{\mu\mu} < 0$ alors $n(\text{Hess}\Theta) = n(-C) + 1$.

Démonstration. La matrice P est explicite, elle est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\Theta_{\mu\mu}} \tilde{\nabla}\Theta_\mu & I_{N+1} \end{pmatrix},$$

où $\tilde{\nabla} = (\nabla_\lambda \partial_c)$. Le deuxième point est immédiat lorsque l'on a la première relation, en effet $\text{Hess}\Theta$ et $D = \begin{pmatrix} \Theta_{\mu\mu} & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix}$ sont congruentes. \square

2.3 Discussion des hypothèses et de l'indice de stabilité pour le cas considéré

Pour finir cette partie, on discute les différentes hypothèses des sous-parties précédentes dans les cas qui nous intéressent. Pour cela, on décrit les idées principales de la partie 5 de [BGMR16].

2.3.1 Cas scalaire

On se place tout d'abord dans le cas scalaire, $N = 1$. On commence par discuter les hypothèses 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 et 2.2.4, sachant que l'hypothèse 2.2.1 implique l'hypothèse 2.1.1.

Pour l'**hypothèse 2.2.1**, il suffit de voir que les profils \underline{v} des ondes périodiques vérifient une EDO (1.2.4) dont les paramètres sont (μ, λ, c) . Des arguments classiques d'EDO permettent de montrer l'existence des ondes progressives et leur paramétrisation par (μ, λ, c) .

Pour l'**hypothèse 2.2.2**, d'après la proposition 2.2.1 il nous suffit de supposer que $\Theta_{\mu\mu} \neq 0$ et que $\det(\text{Hess}\Theta) \neq 0$ pour qu'elle soit vérifiée.

Pour l'**hypothèse 2.2.3**, il nous faut choisir un espace d'énergie, pour cela, on pose $\mathbb{H}_\Xi = H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$ comme suggéré par la remarque 2.2.3. En effet, dans le cas scalaire, on a que

$$\mathcal{H}(v, v_x) = f(v) + \frac{1}{2} \kappa(v) v_x^2,$$

ainsi, avec ce choix pour \mathbb{H}_Ξ , l'application

$$E: v \longmapsto \int_0^\Xi \mathcal{H}(v, v_x) dx$$

est bien définie pour $v \in H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$ car on a l'injection $H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathcal{C}_b^0$. De plus cette application est deux fois différentiable,

$$\forall h \in H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}), \quad dE(v).h = \int_0^\Xi \left(f'(v)h + \frac{1}{2}\kappa'(v)v_x^2 h + \kappa(v)v_x h_x \right) dx$$

et

$$\forall h, k \in H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}), \quad d^2E(v).(h, k) = \int_0^\Xi \left(f''(v)hk + \frac{1}{2}\kappa''(v)v_x^2 hk + \kappa'(v)(hk_x + h_x k) + \kappa(v)h_x + k_x \right) dx$$

Si de plus $v \in \mathcal{C}^2$, ce qui est le cas pour les ondes périodiques, une intégration par partie donne

$$\forall h \in H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}), \quad dE(v).h = \int_0^\Xi h \delta \mathcal{H}[v] dx$$

et

$$\forall h, k \in H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}), \quad d^2E(v).(h, k) = \langle \text{Hess } \mathcal{H}[v] h, k \rangle,$$

où δ est la dérivée variationnelle, Hess la hessienne variationnelle et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité entre $H^{-1}(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$ et $H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$. De plus, on a que pour v une onde périodique, Hess \mathcal{H} est un opérateur de Sturm-Liouville, à coefficients Ξ périodique, de la forme $-\partial_x K \partial_x + q$ où

$$K = \kappa(v) \in \mathcal{C}_b^2 \quad q = f''(v) + \frac{1}{2}\kappa''(v)v_x^2 - \partial_x(\kappa'(v)v_x) \in \mathcal{C}_b^0.$$

En notant $K_0 > 0$, $K_1 > 0$ et $\alpha_0 > 0$ des constantes tel que $0 < K_0 < K < K_1$ et $\|q\|_{L^\infty} < \alpha_0$, comme on a

$$\langle \text{Hess } \mathcal{H}[v] h, k \rangle + \alpha \|h\|_{L^2}^2 = \int_0^\Xi (K h_x^2 + (q + \alpha) h^2) dx,$$

pour $\alpha > \alpha_0$ on a

$$\max(K_0, 1) \int_0^\Xi (h_x^2 + h^2) dx \leq \langle \text{Hess } \mathcal{H}[v] h, k \rangle + \alpha \|h\|_{L^2}^2 \geq \max(K_1, 2\alpha) \int_0^\Xi (h_x^2 + h^2) dx.$$

Ce qui montre bien l'hypothèse.

Pour l'**hypothèse 2.2.4**, il nous faut discuter du caractère localement bien posé en temps petit. À notre connaissance, le meilleur résultat d'existence local pour les équations quasi-linéaires que l'on regarde est celui donnée dans [Mie17a], où l'existence locale en temps petit est montré dans $H^s(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$ pour $s > \frac{7}{2}$.

2.3.2 Cas système

On regarde maintenant le cas système, c'est-à-dire que $N = 2$.

Pour l'**hypothèse 2.2.1** et donc aussi l'hypothèse 2.1.1, l'argument est exactement le même que pour $N = 1$. On a vu, (1.2.3), que si $\underline{U} = (\underline{v}, \underline{u})^T$ est une onde périodique, alors \underline{u} est entièrement déterminée par \underline{v} et \underline{v} vérifie une EDO hamiltonienne avec un certain potentiel. La théorie classique des EDO nous permet donc de conclure.

Pour l'**hypothèse 2.2.2**, il suffit aussi d'appliquer la proposition 2.2.1, ainsi si on suppose que $\Theta_{\mu\mu} \neq 0$ et que $\det(\text{Hess } \Theta) \neq 0$, alors elle est vérifiée.

Pour l'**hypothèse 2.2.3**, on choisit comme espace d'énergie $\mathbb{H}_\Xi = H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}) \times L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$, ainsi par l'injection $H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathcal{C}_b^0$ l'application

$$E: U = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \longmapsto \int_0^\Xi \mathcal{H}[U] dx = \int_0^\Xi \mathcal{E}(v, v_x) + \frac{1}{2} \tau(v) u^2 dx,$$

est bien définie. Comme dans le cas $N = 1$, on peut montrer que cette application est de classe \mathcal{C}^2 . De plus, comme pour $N = 1$, si $U \in \mathcal{C}_b^2$, pour $\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) \in (H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}) \times L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}))^2$ on a

$$\begin{aligned} d^2 E(U) \cdot \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) &= \langle \text{Hess } \mathcal{E}[v] v_1, v_2 \rangle \\ &+ \int_0^\Xi \frac{1}{2} \tau''(v) u^2 v_1 v_2 + \tau'(v) u v_1 u_2 + \tau'(v) u v_2 u_1 + \tau(v) u_1 u_2 \, dx. \end{aligned}$$

Comme les ondes périodiques \underline{U} appartiennent à \mathcal{C}_b^2 , pour $U = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \in H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}) \times L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$, on a

$$\langle \text{Hess } \mathcal{H}[\underline{U}] U, U \rangle + \alpha \|U\|_{L^2}^2 = \langle \text{Hess } \mathcal{E}[v] v, v \rangle + \int_0^\Xi \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot A \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} dx,$$

où on a

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \tau''(v) u^2 + \alpha & \tau'(v) u \\ \tau'(v) u & \tau(v) + \alpha \end{pmatrix}.$$

Or par le cas $N = 1$, on sait qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour $\alpha > \alpha_0$,

$$v \mapsto \langle \text{Hess } \mathcal{E}[v] v, v \rangle + \alpha \|v\|_{L^2}^2$$

définie une norme équivalente sur $H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$. Ainsi pour α assez grand, A est définie positive et sa plus petite valeur propre est plus grande que $2\alpha_0$, ainsi l'hypothèse 2.2.3 est vérifiée. [AP09, BGMR16]

Pour l'**hypothèse 2.2.4**, il nous faut regarder les résultats d'existence locale. Pour cela, on peut citer les papiers [BGDD06] et [BGDD07], on a alors l'existence locale dans $H^s(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}) \times H^s(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$ pour $s > 3/2$.

2.3.3 Conclusion la stabilité des ondes périodiques considérées

On finit cette partie en donnant une conclusion générale qui s'applique dans les deux cas, $N = 1$ et $N = 2$. Pour cela, il nous reste juste à calculer l'indice de stabilité, $n(\mathbf{A}) - n(\mathbf{C})$. On énonce le lemme suivant, qui se trouve dans [BGMR16] et qui nous permettra de conclure.

Lemme 2.3.1. *Soit $\kappa : I \rightarrow]0, \infty]$ et $\mathcal{W} : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classes \mathcal{C}^2 sur I un ouvert de \mathbb{R} . On suppose que l'équation d'Euler-Lagrange, $\delta \mathcal{U}[v] = 0$ associé à l'énergie*

$$\mathcal{U} : (v, v_x) \mapsto \frac{1}{2} \kappa(v) v_x^2 - \mathcal{W}(v)$$

admet une famille de solution périodique \underline{v} à valeurs dans I paramétré par les niveaux d'énergies

$$\mu = L \mathcal{U}[v] = \frac{1}{2} \kappa(v) v_x^2 + \mathcal{W}(v).$$

On note Ξ la période de \underline{v} et on suppose que $\partial_\mu \Xi \neq 0$ alors l'opérateur différentiel auto-adjoint

$$a := \text{Hess } \mathcal{U}[\underline{v}] = -\partial_x(\kappa(\underline{v}) \partial_x) - \mathcal{W}''(\underline{v}) + \frac{1}{2} \kappa''(\underline{v}) \underline{v}_x^2 - \partial_x(\kappa'(\underline{v}) \underline{v}_x),$$

vérifie :

- dans $L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$, $\ker(a) = \text{Vect}(\underline{v}_x)$,
- a possède un nombre fini de valeur propre négative et le reste du spectre privé de 0 est borné loin de 0,
- si on note $n(a)$ le nombre de valeur propre négative de a i.e. sa signature négative, on a

1. si $\partial_\mu \Xi > 0$ alors $n(a) = 1$,

2. si $\partial_\mu \Xi < 0$ alors $n(a) = 2$.

Démonstration. La preuve utilise complètement la théorie de Sturm-Liouville et se trouve dans [BGM16]. \square

On peut maintenant énoncer le théorème suivant qui conclut sur les conditions nécessaires à la stabilité ou à l'instabilité des ondes périodiques.

Théorème 2.3.1. *Si on suppose l'hypothèse 1 vérifiée, pour une onde périodique \underline{U} de période Ξ , tel que $\Theta_{\mu\mu} \neq 0$ et Hess Θ soit inversible, on a la pseudo-alternative suivante.*

- Si $n(\text{Hess } \Theta) = N$, l'onde est conditionnellement co-périodiquement orbitalement stable dans $H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}) \times L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$ si $N = 2$ et dans $H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$ si $N = 1$.
- Si $n(\text{Hess } \Theta) - N$ est impair, l'onde est spectralement instable.

Remarque 2.3.1. *Obtenir qu'une pseudo-alternative n'est pas étonnant, cela arrive déjà en dimension finie. En effet, si on regarde une EDO hamiltonienne en dimension d , associée à l'hamiltonien \mathcal{H} alors, pour une constante d'équilibres \underline{u} , on a la pseudo-alternative suivante :*

- si Hess $(\mathcal{H})(\underline{u})$ est inversible et $n(\text{Hess}(\mathcal{H})(\underline{u})) = d$ ou $n(\text{Hess}(\mathcal{H})(\underline{u})) = 0$ alors \underline{u} est stable,
- si Hess $(\mathcal{H})(\underline{u})$ est inversible, $n(\text{Hess}(\mathcal{H})(\underline{u})) \neq d$ et est impair, alors \underline{u} est instable.

Dans les autres cas, cela dépend aussi de la partie antisymétrique de l'équation.

Démonstration. Cas $N = 1$: On a déjà discuté à la sous-partie précédente pourquoi et comment les hypothèses étaient vérifiées. Il nous faut maintenant calculer l'indice de stabilité. On va notamment montrer que si $\Theta_{\mu\mu} \neq 0$ et Hess Θ est inversible alors

$$n(\mathbf{A}) - n(C) = n(\text{Hess } \Theta) - 1.$$

Tout d'abord la proposition 2.2.1 nous donne que

- si $\Theta_{\mu\mu} > 0$ alors $n(\text{Hess } \Theta) = n(-C)$,
- si $\Theta_{\mu\mu} < 0$ alors $n(\text{Hess } \Theta) = n(-C) + 1$.

Comme on la vut avec l'équation (1.2.4) et (2.1.6), on peut appliquer le lemme 2.3.1. Ainsi on obtient que le noyau de \mathbf{A} est engendré par \underline{v}_x et que

- si $\Theta_{\mu\mu} = \Xi_\mu > 0$ alors $n(\mathbf{A}) = 1$,
- si $\Theta_{\mu\mu} = \Xi_\mu < 0$ alors $n(\mathbf{A}) = 2$.

De plus comme $C \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$, $n(-C) = 2 - n(C)$ ainsi, on obtient bien que

$$n(\mathbf{A}) - n(C) = n(\text{Hess } \Theta) - 1.$$

Ce qui conclut pour la stabilité orbitale. Pour l'instabilité, on a déjà montré ce résultat dans la remarque 2.1.2.

Cas $N = 2$: Comme pour le cas précédent, les hypothèses ont déjà été discutées et le critère d'instabilité a été montré dans 2.1.2. Il nous reste donc à calculer seulement l'indice de stabilité. Pour cela il nous faut

juste expliquer comment utiliser le lemme 2.3.1 dans ce cas. Pour $\underline{U} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ une onde périodique, on sait, (1.2.3), que \underline{v} vérifie

$$\delta \ell[\underline{v}] = 0$$

$$L \ell[\underline{v}] = \mu$$

avec

$$\ell[\underline{v}] = \frac{1}{2} \kappa(\underline{v}) \underline{v}_x^2 - \mathcal{W}(v; \lambda, c),$$

où

$$\mathcal{W}(v; \lambda, c) = -f(v) + \frac{1}{2} \tau(v) g(v; \lambda_2, c)^2 - \lambda_1 v \quad \text{et} \quad g(v; \lambda_2, c) = \frac{-1}{\tau(v)} \left(\frac{c}{b} v + \lambda_2 \right).$$

Pour faire le lien avec \mathbf{A} on utilise (2.1.7), on peut alors montrer que pour $\underline{U} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \in H^1(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z}) \times L^2(\mathbb{R}/\Xi\mathbb{Z})$, si on pose $w = \tau(\underline{v}) g'(\underline{v}; \lambda_2, c) v - \tau(\underline{v}) u$ on a

$$\left\langle \mathbf{A} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \text{Hess } \ell[\underline{v}] v, v \rangle + \int_0^\Xi \frac{w^2}{\tau(\underline{v})} dx.$$

Comme par hypothèse $\tau > 0$ on en déduit que

$$n(\mathbf{A}) = n(\text{Hess}(\ell)) \quad \text{et} \quad \ker \mathbf{A} = \left\{ \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}; v \in \ker \text{Hess}(\ell) \text{ et } u = g'(\underline{v}) v \right\}$$

Ainsi en appliquant le lemme 2.3.1 à $\text{Hess}(\ell)$ on obtient bien que le noyau de \mathbf{A} est engendré par \underline{v}_x et que

- si $\Theta_{\mu\mu} > 0$ alors $n(\mathbf{A}) = 1$,
- si $\Theta_{\mu\mu} < 0$ alors $n(\mathbf{A}) = 2$.

De plus, par la proposition 2.2.1 on a toujours que

- si $\Theta_{\mu\mu} > 0$ alors $n(\text{Hess } \Theta) = n(-C)$,
- si $\Theta_{\mu\mu} < 0$ alors $n(\text{Hess } \Theta) = n(-C) + 1$.

Ici $N = 2$ donc $n(-C) = 3 - n(C)$ ainsi, on a

$$n(\mathbf{A}) - n(C) = n(\text{Hess } \Theta) - 2.$$

Ce qui conclut cette preuve. □

3 Limite en double soliton

L'objectif ici va être d'étendre les cas traités dans [BGMR20]. Dans le papier, les auteurs utilisent les résultats précédents pour étudier la stabilité d'ondes périodiques dans deux cas limites. Le premier est autour des constantes, c'est-à-dire pour des ondes périodiques de petite amplitude. Le deuxième est autour des solitons, plus précisément lorsqu'une onde périodique s'approche d'un soliton avec sa période qui tend vers l'infini. Notre but ici est d'étudier la stabilité des ondes périodiques lorsqu'elles tendent vers deux solitons, un soliton "positif" et un "négatif".

On sait que les ondes progressives sont paramétrées par $(\mu, \lambda, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ et vérifie les équations suivantes

$$\delta(\mathcal{H} + cQ)[U] + \lambda = 0.$$

$$L(\mathcal{H} + cQ + \lambda \cdot) [\underline{U}] = \mu$$

En utilisant l'hypothèse 1 on peut expliciter les équations vérifiées par les ondes progressives.

Si $N = 2$, une onde périodique $\underline{U} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ paramétrée par (μ, λ, c) , vérifie

$$\begin{cases} u = g(v; \lambda_2, c), \\ \frac{1}{2}\kappa(v)v_x^2 + \mathcal{W}(v; \lambda, c) = \mu, \end{cases} \quad (3.0.1)$$

où $g(v; \lambda_2, c) = \frac{-1}{\tau(v)} \left(\frac{c}{b}v + \lambda_2 \right)$ et $\mathcal{W}(v; \lambda, c) = -f(v) + \frac{1}{2}\tau(v)g(v; \lambda_2, c)^2 - \lambda_1 v$.

Dans le cas scalaire, $N = 1$ une onde périodique \underline{v} vérifie

$$\frac{1}{2}\kappa(v)v_x^2 + \mathcal{W}(v; \lambda, c) = \mu, \quad (3.0.2)$$

où $\mathcal{W}(v; \lambda, c) = -f(v) - \frac{1}{2}\frac{c}{b}v^2 - \lambda v$.

Le système d'équations (3.0.1) est une équation hamiltonienne en v avec comme potentiel \mathcal{W} et une équation qui détermine u entièrement grâce à v . Il nous suffit donc de regarder, même si $N = 2$, que la deuxième équation. Ainsi grâce à la deuxième équation, à (λ, c) fixé, les ondes périodiques sont entièrement définies par les différents niveaux d'énergie de \mathcal{W} . Si on fixe μ un niveau d'énergie pour les orbites bornées, on a les cas suivants.

- Si $v_\ell < v_r$ sont deux racines de $\mu - \mathcal{W}(\cdot; \lambda, c)$, tel que $\partial_v \mathcal{W}(v_\ell; \lambda, c) < 0$, $\partial_v \mathcal{W}(v_r; \lambda, c) > 0$ et pour $v \in]v_\ell, v_r[$, $\mu - \mathcal{W}(v; \lambda, c) > 0$. Alors, à translation près, la solution \underline{v} de (3.0.2) et $\underline{U} = (v, u)^T$ la solution de (3.0.1) sont périodiques. Ce sont donc les profils d'ondes périodiques.
- Si v_s soit une racine de $\mu - \mathcal{W}(\cdot; \lambda, c)$ qui est un point caractéristique stable, c'est-à-dire $\partial_v \mathcal{W}(v_s; \lambda, c) = 0$ et $\partial_v^2 \mathcal{W}(v_s; \lambda, c) < 0$. Alors, s'il existe une autre racine v^s telle que $\partial_v \mathcal{W}(v^s; \lambda, c) > 0$ si $v_s < v^s$ ou $\partial_v \mathcal{W}(v^s; \lambda, c) < 0$ si $v_s > v^s$, on a à translation près une solution bornée non constante. La solution donc de (3.0.2) si $N = 1$ et de (3.0.1) si $N = 2$, est le profil d'un soliton.

Dans notre cas, on s'intéresse au cas où il existe des ondes périodiques qui, lorsque leurs périodes tendent vers $+\infty$, approchent deux solitons. Pour cela, il nous faut supposer que \mathcal{W} vérifie comme tableau de variation la figure 1. La figure 1 donne le profil "générique" d'un tel potentiel.

v	v_ℓ	v_ℓ^s	v_s	v_r^s	v_r
$\partial_v^2 \mathcal{W}$			-		
$\partial_v \mathcal{W}$	-	-	0	+	+
\mathcal{W}	μ	μ_s	μ_s	μ_s	μ

FIGURE 1 – Tableau de variation du potentiel \mathcal{W}

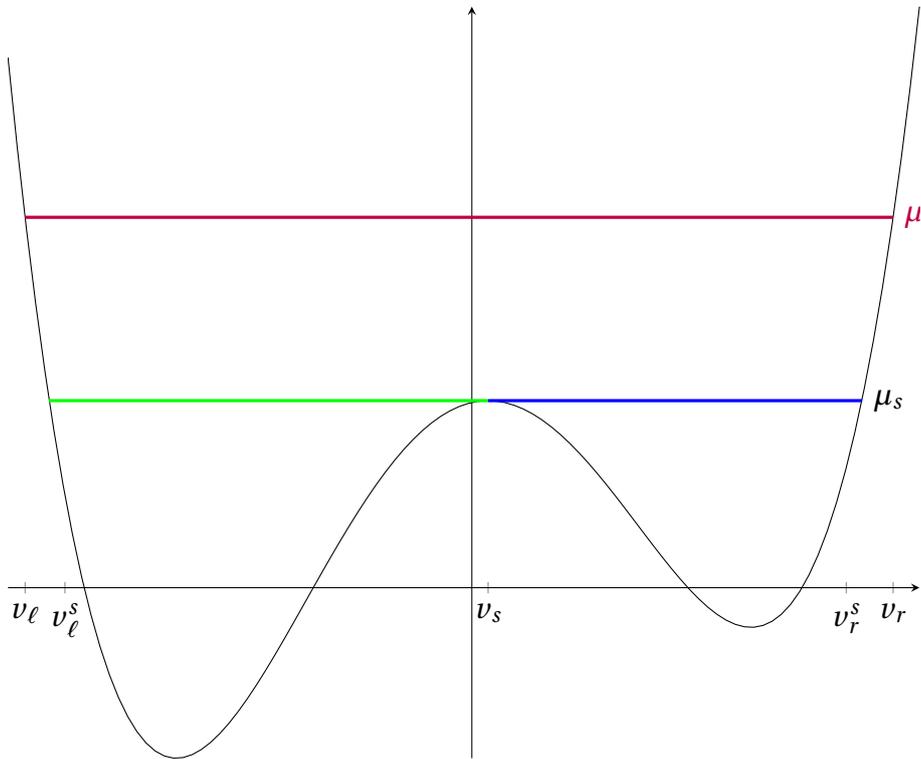


FIGURE 2 – Potentiel "générique" \mathcal{W}

Sur la figure 2, le bleu et le vert correspondent aux niveaux d'énergie des solitons. Le bleu et le vert correspondent chacun à un soliton. En violet correspond le niveau d'énergie des ondes périodiques que l'on considère. Ces ondes périodiques, qui ont un niveau d'énergie $\mu > \mu_s$, on les appellera les *ondes périodiques à deux bosses*. La limite qui nous intéresse est lorsque leurs périodes tendent vers l'infini, c'est-à-dire $\mu \rightarrow \mu_s$ avec $\mu > \mu_s$. Pour un tel potentiel, le portrait de phase associé est donné par la figure 3.

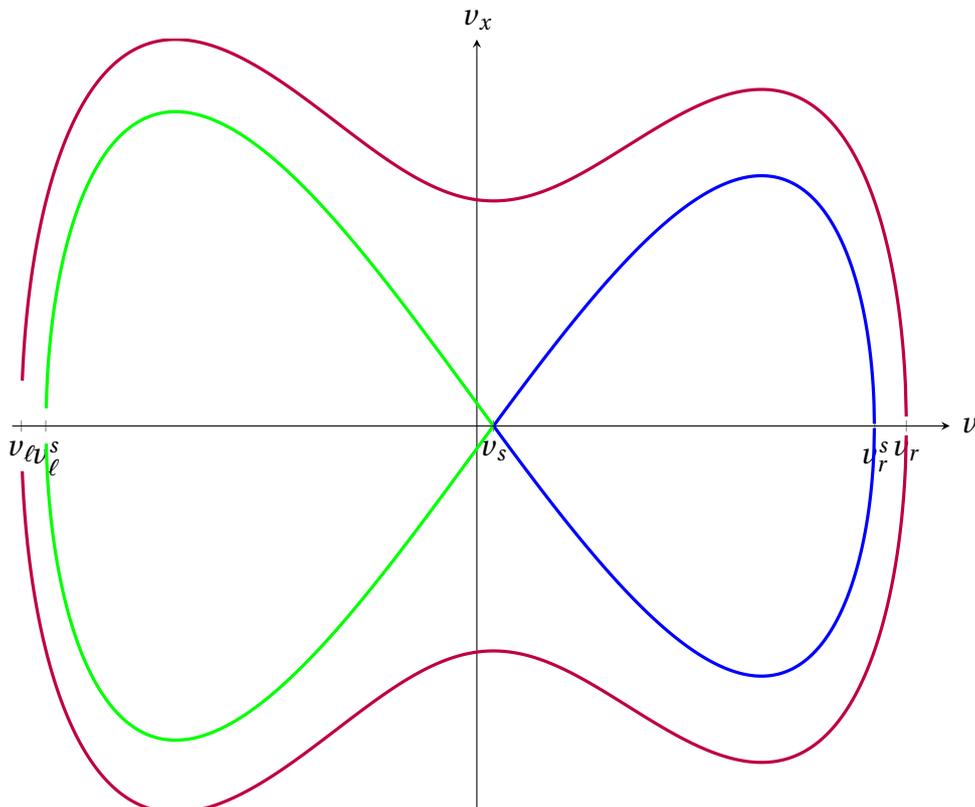


FIGURE 3 – Portrait de phase

Sur le portrait de phase 3 les solitons correspondent aux orbites homoclines verte et bleue. Les cas limites à l'intérieur des orbites homoclines ont déjà été traités dans [BGM20]. Le cas qui nous intéresse est donc celui des orbites en dehors des orbites homoclines lorsque celles-ci tendent vers les orbites homoclines.

Pour formaliser cette discussion, on détaille maintenant l'hypothèse principale que l'on fait sur le potentiel.

Hypothèse 2. On considère un potentiel \mathcal{W} défini et régulier sur $I \times \Lambda$ où I est un ouvert de \mathbb{R} et Λ un ouvert de \mathbb{R}^{N+1} . On suppose qu'il existe des fonctions régulières $v_\ell^s, v_s, v_r^s: \Lambda \rightarrow I$, telles que pour tout $(\lambda, c) \in \Lambda$,

$$v_\ell^s(\lambda, c) < v_s(\lambda, c) < v_r^s(\lambda, c),$$

$$\mu_s(\lambda, c) := \mathcal{W}(v_s(\lambda, c); \lambda, c) = \mathcal{W}(v_\ell^s(\lambda, c); \lambda, c) = \mathcal{W}(v_r^s(\lambda, c); \lambda, c),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(v_\ell^s(\lambda, c); \lambda, c) < 0, \quad \mathcal{W}(v_r^s(\lambda, c); \lambda, c) > 0, \quad \partial_v \mathcal{W}(v_s(\lambda, c); \lambda, c) = 0, \quad \partial_v^2 \mathcal{W}(v_s(\lambda, c); \lambda, c) < 0, \\ \forall v \in]v_\ell^s(\lambda, c), v_s(\lambda, c)[\cup]v_s(\lambda, c), v_r^s(\lambda, c)[, \quad \mathcal{W}(v; \lambda, c) < \mu_s. \end{aligned}$$

On définit $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ par

$$\Omega = \{ \mu = (\mu, \lambda, c); (\lambda, c) \in \Lambda, \mu > \mu_s(\lambda, c) \},$$

et on considère v_ℓ et v_r régulier sur Ω et vérifiant pour $\mu = (\mu, \lambda, c) \in \Omega$,

$$v_\ell(\mu, \lambda, c) < v_\ell^s(\lambda, c) < v_s(\lambda, c) < v_r^s(\lambda, c) < v_r(\mu, \lambda, c),$$

$$\mu = \mathcal{W}(v_\ell(\mu, \lambda, c); \lambda, c) = \mathcal{W}(v_r(\mu, \lambda, c); \lambda, c),$$

$$\forall v \in [v_\ell(\mu, \lambda, c), v_\ell^s(\lambda, c)], \partial_v \mathcal{W}(v; \lambda, c) < 0 \quad \text{et} \quad \forall v \in [v_r^s(\lambda, c), v_r(\mu, \lambda, c)], \partial_v \mathcal{W}(v; \lambda, c) > 0.$$

On fixe donc $(\lambda_*, c_*) \in \Lambda$ et on s'intéresse à la limite

$$\mu = (\mu, \lambda, c) \longrightarrow \mu_{s*} = (\mu_s(\lambda_*, c_*), \lambda_*, c_*) \quad \text{avec} \quad \mu \in \Omega.$$

Remarque 3.0.1. On peut se demander si dans la classe des équations qui rentrent dans notre formalisme, il existe des équations intégrables. C'est le cas de l'équation mKdV focalisante qui est la suivante,

$$\partial_t u + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0.$$

Elle correspond à $N = 1, B = 1$ et avec l'hamiltonien

$$\mathcal{H}[u] = \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 - \frac{1}{2}u^4.$$

Cette équation étant intégrable, on peut étudier très finement ses propriétés, notamment la stabilité de ses ondes progressives. Pour cette équation $\kappa = 1$ et le potentiel est donné par

$$\mathcal{W}(v; \lambda, c) = \frac{1}{4}v^4 - \frac{c}{2}v^2 - \lambda v$$

Ainsi pour certain (λ, c) il vérifie l'hypothèse 2. Dans ce cas, on peut donner des formules explicites, en fonction des fonctions elliptiques, pour les ondes périodiques de cette équation [CP25]. Les ondes à double bosse qui nous intéressent sont, si $\lambda = 0$, les ondes cnoïdales définies comme

$$\underline{v}(x) = k \operatorname{cn}(x, k) \quad \text{où} \quad c = 2k^2 - 1 > 0 \quad \text{et} \quad \mu = k^2(1 - k^2).$$

Puis, il faut appliquer le scaling suivant $u(t, x) \mapsto \alpha u(\alpha^3 t, \alpha x)$, avec $\alpha > 0$, pour obtenir toutes les ondes qui nous intéressent. Dans notre cas, la limite correspond à $c > 0$ et $\mu \rightarrow 0$, c'est-à-dire $k \rightarrow 1$.

Dans le cas où $\lambda \neq 0$ il existe aussi une formule explicite pour exprimer les ondes périodiques à double bosse, mais elle est plus complexe [CP25].

Pour conclure à la stabilité ou l'instabilité, comme on a vu dans le théorème 2.3.1, il suffit de s'intéresser à la Hessienne de l'action. L'objectif va donc être, comme dans [BGMR20], de regarder son comportement asymptotique pour essayer de conclure à la stabilité ou l'instabilité des ondes de suffisamment grande période.

Pour $\boldsymbol{\mu} = (\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \in \Omega$, on note \underline{U} le profil de l'onde périodique associée et on va calculer, quand $\boldsymbol{\mu} \rightarrow \boldsymbol{\mu}_{S^*}$, le comportement asymptotique des quantités suivantes.

- L'action

$$\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{H}[\underline{U}] + cQ(\underline{U}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \underline{U} + \mu \, dx,$$

or, d'après les équations régissant le profil des ondes périodiques, on sait que $L(\mathcal{H} + cQ + \boldsymbol{\lambda} \cdot) [\underline{U}] = \mu$ ce qui nous donne

$$\Theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underline{U}_x \cdot \nabla_{U_x} (\mathcal{H} + cQ + \boldsymbol{\lambda} \cdot) [\underline{U}] \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underline{v}_x \partial_{v_x} \mathcal{E}(\underline{v}, \underline{v}_x) \, dx.$$

En intégrant sur l'orbite vérifiée par $(\underline{v}, \underline{v}_x)$ dans le plan (v, v_x) et en utilisant (3.0.1) pour $N=2$ et (3.0.2) pour $N=1$, on obtient

$$\Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) = 2 \int_{v_\ell}^{v_r} \sqrt{2\kappa(v) (\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c))} \, dv.$$

- Les dérivées de l'action, qui par la proposition 1 de [BGNR13], sont données par

$$\partial_\mu \Theta = \Xi = \int_{v_\ell}^{v_r} \sqrt{\frac{2\kappa(v)}{\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c)}} \, dv,$$

$$\partial_{\lambda_1} \Theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underline{v} \, dx = \int_{v_\ell}^{v_r} v \sqrt{\frac{2\kappa(v)}{\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c)}} \, dv,$$

$$\partial_{\lambda_2} \Theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(\underline{v}; \lambda_2, c) \, dx = \int_{v_\ell}^{v_r} g(v; \lambda_2, c) \sqrt{\frac{2\kappa(v)}{\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c)}} \, dv,$$

$$\partial_c \Theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Q(\underline{U}) \, dx = \int_{v_\ell}^{v_r} q(v; \lambda_2, c) \sqrt{\frac{2\kappa(v)}{\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c)}} \, dv,$$

où $q(v; \lambda_2, c) = Q(g(v; \lambda_2, c))$ si $N = 2$ et $q(v; \lambda_2, c) = Q(v)$ si $N = 1$

Cela nous entraîne à introduire un nouveau lagrangien pour étudier ces intégrales,

$$\mathcal{L}(v; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c) := \mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c).$$

Comme ∇ correspond au gradient selon $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$, on a

$$\text{si } N = 2, \nabla \mathcal{L}(v; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c) = \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ g(v; \lambda_2, c) \\ q(v; \lambda_2, c) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{si } N = 1, \nabla \mathcal{L}(v; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c) = \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ Q(v) \end{pmatrix}.$$

Par ce qui précède, on a

$$\nabla \Theta(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c) = \int_{v_\ell}^{v_r} \nabla \mathcal{L}(v; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c) \sqrt{\frac{2\kappa(v)}{\mathcal{L}(v; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c)}} \, dv.$$

On introduit maintenant des notations qui nous seront utiles pour exprimer les différentes limites, elles sont très similaires, voir identiques pour certaines, à celles utilisées sans [BGMR20].

Notation 1. Pour une fonction $\phi = \phi(v; \mu, \lambda, c)$ on note

$$\phi_s = \phi(v_s(\lambda, c); \mu_s(\lambda, c), \lambda, c).$$

On note pour les différentes dérivées de \mathcal{L} ,

$$\nabla \mathcal{L}_s = V_s, \quad \nabla \mathcal{L}_{v,s} = W_s, \quad \nabla \mathcal{L}_{vv,s} = Z_s.$$

Dans le détail, si $N = 2$, on a

$$V_s = \begin{pmatrix} 1 \\ v_s \\ g_s \\ q_s \end{pmatrix}, \quad W_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g_{v,s} \\ q_{v,s} \end{pmatrix}, \quad Z_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_{vv,s} \\ q_{vv,s} \end{pmatrix}.$$

Et si $N = 1$,

$$V_s = \begin{pmatrix} 1 \\ v_s \\ q_s \end{pmatrix}, \quad W_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q_{v,s} \end{pmatrix}, \quad Z_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{vv,s} \end{pmatrix}.$$

Pour la Hessienne, si $N = 1$, $\nabla^2 \mathcal{L} = 0$ et si $N = 2$ on a

$$\nabla^2 \mathcal{L}_s = -T_s \otimes T_s := -T_s T_s^T,$$

où T_s est le vecteur colonne défini comme

$$T_s = \frac{1}{\sqrt{\tau(v_s)}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{v_s}{b} \end{pmatrix}.$$

Dans un souci de cohérence, on notera $T_s = 0$ dans le cas $N = 1$.

Comme v_s est une racine double de $\mathcal{L}(\cdot; \mu_s, \lambda, s)$ on introduit

$$R(v, w, z; \lambda, c) = \int_0^1 \int_0^1 t \partial_v^2 \mathcal{W}(w + t(z - w) + ts(v - z); \lambda, c) ds dt,$$

ainsi, on a

$$\mathcal{L}(v; \mu, \lambda, c) = \mu - \mathcal{W}(v, \lambda, c) = \mu - \mu_s - (v - v_s)^2 R(v, v_s, v_s; \lambda, c).$$

On notera donc $R_s = R(v_s, v_s, v_s; \lambda, c) = \frac{1}{2} \partial_v^2 \mathcal{W}(v_s; \lambda, c)$ et

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(v, w, z; \lambda, c) = \sqrt{\frac{2\kappa(v)}{|R(v, w, z; \lambda, c)|}}.$$

On introduit maintenant les notations pour les coefficients qui apparaîtront dans les développements asymptotiques.

Notation 2. On note

$$a_s = \sqrt{\frac{2}{-\partial_v^2 \mathcal{W}(v_s; \lambda, c)}}, \quad b_s = \frac{1}{3} \frac{\partial_v^3 \mathcal{W}(v_s; \lambda, c)}{(\partial_v^2 \mathcal{W}(v_s; \lambda, c))^2},$$

$$p_r^s = \frac{1}{\partial_v \mathcal{W}(v_r^s(\lambda, c); \lambda, c)}, \quad p_\ell^s = \frac{1}{\partial_v \mathcal{W}(v_\ell^s(\lambda, c); \lambda, c)}.$$

On détaille maintenant la stratégie pour calculer les comportements asymptotiques. On remarque que toutes les quantités qui nous intéressent sont de la forme

$$I(\phi) := \int_{v_\ell}^{v_r} \frac{\phi(v)}{\sqrt{\mu - \mathcal{W}(v)}} dv,$$

où ϕ est une fonction régulière. Dans l'appendice A, on calcule donc le comportement asymptotique de telle intégrale en fonction de $\varepsilon = \sqrt{\mu - \mu_s}$. Dans les sous-parties qui suivent, on utilise le résultat obtenu, à savoir le théorème A.1.1, pour calculer le développement asymptotique de $\nabla^2 \Theta$ est ainsi essayer de conclure à de la stabilité ou de l'instabilité pour les ondes périodiques à deux bosses de suffisamment grandes périodes.

3.1 Comportement asymptotique de l'action et de la période

On commence par étudier le comportement asymptotique des racines de la fonction $\mathcal{L}(v; \mu, \lambda, c) = \mu - \mathcal{W}(v; \lambda, c)$. On rappelle que l'on a noté v_ℓ la racine de $\mathcal{L}(\cdot; \mu, \lambda, c)$ à gauche de v_s et v_r la racine à droite.

Proposition 3.1.1. *Avec les notations 1 et 2 et l'hypothèse 2, pour $\varepsilon = \sqrt{\mu - \mu_s} \rightarrow 0$ on a les asymptotiques suivantes pour les racines*

$$\begin{cases} v_r = v_r^s + p_r^s \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \\ v_\ell = v_\ell^s + p_\ell^s \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \end{cases}$$

Démonstration. Les preuves étant identiques pour les deux racines, on ne détaille que celle pour v_r . On sait que

$$\mathcal{W}(v_r^s; \lambda, c) - \mu_s = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{W}(v_r; \lambda, c) - \mu = 0$$

Par le théorème des fonctions implicites, comme $\partial_v \mathcal{W}(v_r^s; \lambda, c) \neq 0$, il existe une fonction ϕ telle que

$$v_r - v_r^s = \phi(\mu - \mu_s).$$

Et on sait que

$$\phi'(0) = \frac{1}{\partial_v \mathcal{W}(v_r^s; \lambda, c)} = p_r^s.$$

On a donc bien par Taylor

$$v_r - v_r^s = \phi(\mu - \mu_s) = p_r^s (\mu - \mu_s) + \mathcal{O}((\mu - \mu_s)^2).$$

Ce qui conclut la preuve car $\varepsilon = \sqrt{\mu - \mu_s}$. □

On calcule maintenant le comportement asymptotique de la période et de l'action. Tout d'abord, si on note \underline{U}_ℓ le profil du soliton à gauche et \underline{U}_r le profil du soliton à droite les moments de Boussinesq des deux solitons sont donnés par

$$\mathcal{M}_\ell = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{H}[\underline{U}_\ell] + cQ(\underline{U}_\ell) + \lambda \cdot \underline{U}_\ell + \mu_s) dx,$$

$$\mathcal{M}_r = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{H}[\underline{U}_r] + cQ(\underline{U}_r) + \lambda \cdot \underline{U}_r + \mu_s) dx.$$

En utilisant $L(\mathcal{H} + cQ + \lambda \cdot)[\underline{U}_\ell] = L(\mathcal{H} + cQ + \lambda \cdot)[\underline{U}_r] = \mu_s$ et en intégrant sur l'orbite vérifiée; par \underline{v}_r et \underline{v}_ℓ dans le portrait de phase, on obtient

$$\mathcal{M}_\ell = 2 \int_{v_\ell^s}^{v_s} \sqrt{2\kappa(v) (\mu_s - \mathcal{W}(v; \lambda, c))} dv,$$

$$\mathcal{M}_r = 2 \int_{v_s}^{v_r^s} \sqrt{2\kappa(v) (\mu_s - \mathcal{W}(v; \lambda, c))} dv.$$

Proposition 3.1.2. *On note \mathcal{M}_r , respectivement \mathcal{M}_ℓ , le moment de Boussinesq lié à l'onde solitaire à droite, respectivement à gauche. Avec les notations 1 et 2 et l'hypothèse 2 on a, pour $\varepsilon = \sqrt{\mu - \mu_s} \rightarrow 0$, le comportement asymptotique suivant*

$$\Theta \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{M}_r + \mathcal{M}_\ell,$$

et

$$\Xi = -2a_s \sqrt{2\kappa(v_s)} \ln \varepsilon + \mathcal{O}(1).$$

Démonstration. On commence par la période, comme on sait que

$$\Xi = \int_{v_\ell}^{v_r} \sqrt{\frac{2\kappa(v)}{\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c)}} dv = I(\sqrt{2\kappa}).$$

Il nous suffit d'utiliser le théorème A.1.1 qui nous donne directement

$$\Xi = -2\sqrt{\frac{4\kappa(v_s)}{-\partial_v^2 \mathcal{W}(v_s; \boldsymbol{\lambda}, c)}} \ln \varepsilon + \mathcal{O}(1).$$

Ce qui conclut car $a_s = \sqrt{-2/\partial_v^2 \mathcal{W}(v_s; \boldsymbol{\lambda}, c)}$.

Pour l'action, il suffit d'écrire que

$$\begin{aligned} \Theta &= 2 \int_{v_\ell}^{v_r} \sqrt{2\kappa(v) (\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c))} dv \\ &= 2 \int_{v_s}^{v_r} \sqrt{2\kappa(v) (\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c))} dv + 2 \int_{v_s}^{v_r} \sqrt{2\kappa(v) (\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c))} dv \\ &=: \Theta_\ell + \Theta_r. \end{aligned}$$

Pour Θ_ℓ , respectivement Θ_r , on fait le changement de variable $\mathcal{V}_\ell = v_s + \sigma(v_\ell - v_s)$, respectivement $\mathcal{V}_r = v_s + \sigma(v_r - v_s)$. On obtient

$$\begin{aligned} \Theta_\ell &= 2(v_s - v_\ell) \int_0^1 \sqrt{\kappa(\mathcal{V}_\ell) (\mu - \mathcal{W}(\mathcal{V}_\ell; \boldsymbol{\lambda}, c))} d\sigma, \\ \Theta_r &= 2(v_r - v_s) \int_0^1 \sqrt{\kappa(\mathcal{V}_r) (\mu - \mathcal{W}(\mathcal{V}_r; \boldsymbol{\lambda}, c))} d\sigma. \end{aligned}$$

Ainsi, il est clair par convergence dominée que

$$\begin{aligned} \Theta_\ell &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2(v_s - v_\ell^s) \int_0^1 \sqrt{\kappa(\mathcal{V}_\ell^s) (\mu - \mathcal{W}(\mathcal{V}_\ell^s; \boldsymbol{\lambda}, c))} d\sigma, \\ \Theta_r &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2(v_r^s - v_s) \int_0^1 \sqrt{\kappa(\mathcal{V}_r^s) (\mu - \mathcal{W}(\mathcal{V}_r^s; \boldsymbol{\lambda}, c))} d\sigma, \end{aligned}$$

où $\mathcal{V}_\ell^s = v_s + \sigma(v_\ell^s - v_s)$ et $\mathcal{V}_r^s = v_r^s + \sigma(v_r^s - v_s)$.

En faisant le changement de variable inverse, $v = \mathcal{V}_\ell^s$ et $v = \mathcal{V}_r^s$, pour la limite, on obtient bien que

$$\Theta_\ell \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{M}_\ell \quad \text{et} \quad \Theta_r \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{M}_r.$$

□

3.2 Comportement asymptotique de la Hessienne de l'action

Comme dans [BGMR20], pour calculer le comportement asymptotique de la Hessienne, on commence par étudier le comportement asymptotique du gradient de l'action. On sait que l'on a

$$\nabla \Theta = \int_{v_\ell}^{v_r} \nabla \mathcal{L}(v) \sqrt{\frac{2\kappa(v)}{\mu - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c)}} dv.$$

C'est-à-dire que l'on a $\nabla \Theta = I(\nabla \mathcal{L} \sqrt{2\kappa})$. On peut donc utiliser le théorème A.1.1 pour connaître le comportement asymptotique de $\nabla \Theta$. Le résultat est le suivant.

Proposition 3.2.1. Avec les notations 1 et 2 et l'hypothèse 2, pour $\varepsilon = \sqrt{\mu - \mu_s} \rightarrow 0$, on a le comportement asymptotique suivant

$$\nabla\Theta = A_0 \ln(\varepsilon) + B_0 + B_1 \varepsilon + A_2 \varepsilon^2 \ln(\varepsilon) + B_2 \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3 \ln(\varepsilon)),$$

où les coefficients sont données par

- i) $A_0 = -2\mathcal{Y}_s V_s$,
- ii) $B_0 = \int_0^1 \frac{f(\mathcal{V}_\ell^s, v_s, v_s) - \mathcal{Y}_s V_s}{\sigma} d\sigma + \int_0^1 \frac{f(\mathcal{V}_r^s, v_s, v_s) - \mathcal{Y}_s V_s}{\sigma} d\sigma + \ln(4(v_r^s - v_s)(v_s - v_\ell^s)(-R_s)) \mathcal{Y}_s V_s$,
- iii) $B_1 = -2a_s^2 \mathcal{Y}_s V_s$,
- iv) $A_2 = \left(\frac{3\kappa_{v_s} R_{v_s}}{4\sqrt{2\kappa_s}(-R_s)^{5/2}} + \frac{3\sqrt{2\kappa_s} R_{vv_s}}{4(-R_s)^{5/2}} + \frac{15\sqrt{2\kappa_s} R_{v_s}^2}{8(-R_s)^{7/2}} \right) V_s + \frac{3}{4} \frac{\sqrt{2\kappa_s} R_{vv_s}}{4(-R_s)^{5/2}} W_s$,
- v) $B_2 = B_2(\nabla \mathcal{L} \sqrt{2\kappa})$,

où $f(v, w, z) = \nabla \mathcal{L}(v) \sqrt{\frac{2\kappa(v)}{|R(v, w, z)|}}$, $\mathcal{V}_\ell^s = v_s + \sigma(v_\ell^s - v_s)$ et $\mathcal{V}_r^s = v_s + \sigma(v_r^s - v_s)$.

Démonstration. Comme dit précédemment, on utilise simplement le théorème A.1.1 avec $\phi = \nabla \mathcal{L} \sqrt{2\kappa}$ et il suffit de simplifier chaque coefficient. Pour cela, on rappelle que

$$a_s = \sqrt{\frac{-2}{\partial_v^2 \mathcal{W}(v_s; c, \lambda)}} = \frac{1}{\sqrt{-R_s}}.$$

Ceci nous donne

$$a_s \sqrt{2\kappa_s} = \sqrt{\frac{-2\kappa_s}{R_s}} = \mathcal{Y}_s.$$

On peut donc simplifier les premiers coefficients, on a

$$A_0 = -2\nabla \mathcal{L}_s \sqrt{\frac{2\kappa_s}{-R_s}} = -2\mathcal{Y}_s V_s.$$

Et de même

$$B_1 = -2\nabla \mathcal{L}_s \frac{\sqrt{2\kappa_s}}{-R_s} = -2a_s^2 \sqrt{2\kappa_s} V_s = -2a_s \mathcal{Y}_s V_s.$$

On utilise que $\nabla \mathcal{L}_{v_s} = W_s$ ce qui nous donne le coefficient A_2 . Pour le coefficient B_2 , il peut être rendu explicite en utilisant le théorème A.1.1, mais comme on n'utilisera pas sa forme exacte, on ne détaille pas son calcul ici. Il nous reste à expliciter le coefficient B_0 qui est donné par

$$\begin{aligned} B_0 &= \int_{v_\ell^s}^{v_s - \eta} \nabla \mathcal{L}(v) \frac{\sqrt{2\kappa(v)}}{\sqrt{\mu_s - \mathcal{W}(v)}} dv + \int_{v_s + \eta}^{v_r^s} \nabla \mathcal{L}(v) \frac{\sqrt{2\kappa(v)}}{\sqrt{\mu_s - \mathcal{W}(v)}} dv \\ &+ \int_{v_s}^{v_s + \eta} \frac{1}{v - v_s} \left(\nabla \mathcal{L}(v) \frac{\sqrt{2\kappa(v)}}{\sqrt{-R(v)}} - \frac{\sqrt{2\kappa_s}}{\sqrt{-R_s}} V_s \right) dv + \int_{v_s - \eta}^{v_s} \frac{-1}{v - v_s} \left(\nabla \mathcal{L}(v) \frac{\sqrt{2\kappa(v)}}{\sqrt{-R(v)}} - \frac{\sqrt{2\kappa_s}}{\sqrt{-R_s}} V_s \right) dv \\ &+ 2 \frac{\sqrt{2\kappa_s}}{\sqrt{-R_s}} \ln(2\eta \sqrt{-R_s}) V_s. \end{aligned}$$

On utilise que $\mu_s - \mathcal{W}(v; c, \lambda) = -(v - v_s)^2 R(v, v_s, v_s; \lambda, c)$, et que $f(v, w, z) = \nabla \mathcal{L}(v) \sqrt{\frac{2\kappa(v)}{|R(v, w, z)|}}$.

$$\begin{aligned} B_0 &= \int_{v_\ell^s}^{v_s - \eta} \left(\frac{f(v, v_s, v_s)}{-(v - v_s)} - \frac{\mathcal{Y}_s}{-(v - v_s)} V_s \right) dv + \int_{v_s + \eta}^{v_r^s} \left(\frac{f(v, v_s, v_s)}{(v - v_s)} - \frac{\mathcal{Y}_s}{(v - v_s)} V_s \right) dv \\ &+ \int_{v_s - \eta}^{v_s} \left(\frac{f(v, v_s, v_s)}{-(v - v_s)} - \frac{\mathcal{Y}_s}{-(v - v_s)} V_s \right) dv + \int_{v_s}^{v_s + \eta} \left(\frac{f(v, v_s, v_s)}{(v - v_s)} - \frac{\mathcal{Y}_s}{(v - v_s)} V_s \right) dv \\ &+ \int_{v_\ell^s}^{v_s - \eta} \frac{\mathcal{Y}_s}{-(v - v_s)} V_s dv + \int_{v_s + \eta}^{v_r^s} \frac{\mathcal{Y}_s}{(v - v_s)} V_s dv + 2\mathcal{Y}_s \ln(2\eta \sqrt{-R_s}) V_s. \end{aligned}$$

Pour l'intégrale à gauche, on fait le changement de variable $\mathcal{V}_\ell^s = v_s + \sigma(v_\ell^s - v_s)$ et pour l'intégrale à droite $\mathcal{V}_r^s = v_s + \sigma(v_r^s - v_s)$, on obtient donc

$$B_0 = \int_0^1 \frac{f(\mathcal{V}_\ell^s, v_s, v_s) - \mathcal{Y}_s V_s}{\sigma} d\sigma + \int_0^1 \frac{f(\mathcal{V}_r^s, v_s, v_s) - \mathcal{Y}_s V_s}{\sigma} d\sigma \\ + \ln\left(\frac{v_r^s - v_s}{\eta}\right) \mathcal{Y}_s V_s - \ln\left(\frac{\eta}{v_s - v_\ell^s}\right) \mathcal{Y}_s V_s + 2\ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \mathcal{Y}_s V_s.$$

Ce qui nous donne bien

$$B_0 = \int_0^1 \frac{f(\mathcal{V}_\ell^s, v_s, v_s) - \mathcal{Y}_s V_s}{\sigma} d\sigma + \int_0^1 \frac{f(\mathcal{V}_r^s, v_s, v_s) - \mathcal{Y}_s V_s}{\sigma} d\sigma + \ln(4(v_r^s - v_s)(v_s - v_\ell^s)(-R_s)) \mathcal{Y}_s V_s.$$

□

On déduit de ce développement asymptotique, le développement asymptotique de la hessienne de l'action, c'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 3.2.1. *Avec les notations 1 et 2 et l'hypothèse 2, pour $\varepsilon = \sqrt{\mu - \mu_s} \rightarrow 0$, on a le comportement asymptotique suivant*

$$\nabla^2 \Theta = D_0 \varepsilon^{-2} + D_1 \varepsilon^{-1} + C_2 \ln(\varepsilon) + D_2 + \mathcal{O}(\varepsilon \ln(\varepsilon)),$$

où les coefficients sont données par

- i) $D_0 = -\mathcal{Y}_s V_s \otimes V_s,$
- ii) $D_1 = -a_s \mathcal{Y}_s V_s \otimes V_s,$
- iii) $C_2 = \frac{a_s^2}{2} \mathcal{Y}_s V_s \otimes Z_s + (2b_s \mathcal{Y}_s + a_s^2 \mathcal{Y}_{v,s}) V_s \otimes W_s + 2\mathcal{Y}_s T_s \otimes T_s + a_s^2 \mathcal{Y}_s W_s \otimes W_s \\ + \left(\frac{3\kappa_{v,s} R_{v,s}}{4\sqrt{2\kappa_s}(-R_s)^{5/2}} + \frac{3\sqrt{2\kappa_s} R_{vv,s}}{4(-R_s)^{5/2}} + \frac{15\sqrt{2\kappa_s} R_{v,s}^2}{8(-R_s)^{7/2}} \right) V_s \otimes V_s + \frac{3}{4} \frac{\sqrt{2\kappa_s} R_{vv,s}}{(-R_s)^{5/2}} W_s \otimes V_s.$

On note \mathcal{M}_r , respectivement \mathcal{M}_ℓ , le moment de Boussinesq lié à l'onde solitaire à droite, respectivement à gauche. Alors si on désigne d_c la dérivée selon la vitesse c de l'onde solitaire à l'état final U_s fixé, on obtient que

$$S_s \cdot D_2 S_s = d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r,$$

où on a $S_s = (-q_s, (B^{-1} U_s)^T, -1)^T$

Démonstration. Pour déduire de la proposition 3.2.1 notre résultat, il nous faut commencer par calculer $\nabla \varepsilon$. On sait que

$$\varepsilon = \sqrt{\mu - \mu_s} = \sqrt{\mu - \mathcal{W}(v_s; \boldsymbol{\lambda}, c)} = \sqrt{\mathcal{L}(v_s; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c)}.$$

Or comme $\partial_v \mathcal{L}(v_s; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c) = -\partial_v \mathcal{W}(v_s; \boldsymbol{\lambda}, c) = 0$, on obtient donc que

$$\nabla \varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{L}(v_s; \mu, \boldsymbol{\lambda}, c)}} \nabla \mathcal{L}_s = \frac{1}{2\varepsilon} V_s.$$

De plus, on sait par la proposition 3.2.1 que

$$\nabla \Theta = A_0 \ln(\varepsilon) + B_0 + B_1 \varepsilon + A_2 \varepsilon^2 \ln(\varepsilon) + B_2 \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3 \ln(\varepsilon)).$$

Ainsi, en notant ∇_{tot} le gradient total par rapport à $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$, c'est-à-dire que l'on dérive aussi v_s , v_r^s et v_ℓ^s par rapport à $(\mu, \boldsymbol{\lambda}, c)$, on obtient que

$$\nabla^2 \Theta = (A_0 \varepsilon^{-1} + B_1 + 2A_2 \varepsilon \ln(\varepsilon) + (A_2 + 2B_2) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2 \ln(\varepsilon))) \otimes \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{-1} V_s \right) \\ + \nabla_{\text{tot}} A_0 \ln(\varepsilon) + \nabla_{\text{tot}} B_0 + \mathcal{O}(\varepsilon \ln(\varepsilon)).$$

Ainsi, on a bien que

$$\nabla^2 \Theta = D_0 \varepsilon^{-2} + D_1 \varepsilon^{-1} + C_2 \ln(\varepsilon) + D_2 + \mathcal{O}(\varepsilon \ln(\varepsilon)),$$

où les coefficients sont données par

- i) $D_0 = \frac{1}{2} A_0 \otimes V_s,$
- ii) $D_1 = \frac{1}{2} B_1 \otimes V_s,$
- iii) $C_2 = \nabla_{\text{tot}} A_0 + A_2 \otimes V_s,$
- iv) $D_2 = \nabla_{\text{tot}} B_0 + \frac{1}{2} (A_2 + 2B_2) \otimes V_s.$

Il nous reste plus qu'à identifier chaque coefficient. Pour cela, on rappelle que d'après la proposition 3.2.1 on a que $A_0 = -2\mathcal{Y}_s V_s$ et $B_1 = -2a_s \mathcal{Y}_s V_s$, ainsi pour le premier coefficient, on a

$$D_0 = -\mathcal{Y}_s V_s \otimes V_s \quad \text{et} \quad D_1 = -a_s \mathcal{Y}_s V_s \otimes V_s.$$

Pour connaître C_2 on commence par calculer $\nabla_{\text{tot}} A_0$, or comme $A_0 = -2\mathcal{Y}_s V_s$, on a

$$\nabla_{\text{tot}} A_0 = -2V_s \otimes \nabla_{\text{tot}} \mathcal{Y}_s - 2\mathcal{Y}_s \nabla_{\text{tot}} V_s.$$

Comme $\nabla \mathcal{L}_s = V_s$ on a par définition

$$\nabla_{\text{tot}} V_s = -T_s \otimes T_s + W_s \otimes \nabla v_s.$$

Pour connaître ∇v_s on utilise que v_s étant un point critique du potentiel $\partial_v \mathcal{W}(v_s(c, \boldsymbol{\lambda}); \boldsymbol{\lambda}, c) = 0$. En prenant le gradient, on obtient que

$$\partial_v^2 \mathcal{W}(v_s; \boldsymbol{\lambda}, c) \nabla v_s + \nabla \partial_v \mathcal{W}(v_s; \boldsymbol{\lambda}, c) = 0 \quad \text{donc} \quad \nabla v_s = -\frac{a_s^2}{2} W_s.$$

Ce qui donne

$$\nabla_{\text{tot}} V_s = -T_s \otimes T_s - \frac{a_s^2}{2} W_s \otimes W_s.$$

Il nous faut maintenant connaître $\nabla_{\text{tot}} \mathcal{Y}_s$. Or, on a par symétrie de \mathcal{Y} en w et z que

$$\nabla_{\text{tot}} \mathcal{Y}_s = \nabla \mathcal{Y}_s + (\mathcal{Y}_{v,s} + 2\mathcal{Y}_{w,s}) \nabla v_s.$$

Pour le premier terme, comme proche de (v_s, v_s, v_s) ,

$$\mathcal{Y}(v, w, z; \boldsymbol{\lambda}, c) = \sqrt{\frac{2\kappa(v)}{-R(v, w, z; \boldsymbol{\lambda}, c)}}$$

on a

$$\frac{\nabla \mathcal{Y}_s}{\mathcal{Y}_s} = -\frac{\nabla R_s}{2R_s}$$

Or, on sait que $R_s = -\frac{1}{a_s^2}$ et on a

$$\nabla R_s = \int_0^1 \int_0^1 t (\nabla \partial_v^2 \mathcal{W})(v_s) du dt = -\frac{1}{2} Z_s.$$

Ainsi, on a

$$\nabla \mathcal{Y}_s = -\frac{a_s^2}{4} \mathcal{Y}_s Z_s$$

On a aussi que $\frac{\mathcal{Y}_{z,s}}{\mathcal{Y}_s} = -\frac{R_{z,s}}{2R_s}$ et

$$R_{z,s} = \int_0^1 \int_0^1 t^2 (1-u) \partial_v^3 \mathcal{W}(v_s) du dt = \frac{12b_s}{a_s^4} \int_0^1 t^2 dt \int_0^1 (1-u) du = \frac{2b_s}{a_s^4},$$

où pour rappel $b_s = \frac{1}{3} \frac{\partial_v^3 \mathcal{W}(v_s; \lambda, c)}{(\partial_v^2 \mathcal{W}(v_s; \lambda, c))^2}$. Ceci nous permet de conclure

$$\nabla_{\text{tot}} \mathcal{Y}_s = -\frac{a_s^2}{4} \mathcal{Y}_s Z_s - (b_s \mathcal{Y}_s + \frac{a_s^2}{2} \mathcal{Y}_{v,s}) W_s.$$

En sommant les différents termes on obtient que

$$\nabla_{\text{tot}} A_0 = \frac{a_s^2}{2} \mathcal{Y}_s V_s \otimes Z_s + (2b_s \mathcal{Y}_s + a_s^2 \mathcal{Y}_{v,s}) V_s \otimes W_s + 2\mathcal{Y}_s T_s \otimes T_s + a_s^2 \mathcal{Y}_s W_s \otimes W_s.$$

Comme on connaît A_2 on obtient, pour C_2 ,

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{a_s^2}{2} \mathcal{Y}_s V_s \otimes Z_s + (2b_s \mathcal{Y}_s + a_s^2 \mathcal{Y}_{v,s}) V_s \otimes W_s + 2\mathcal{Y}_s T_s \otimes T_s + a_s^2 \mathcal{Y}_s W_s \otimes W_s \\ &\quad + \left(\frac{3\kappa_{v,s} R_{v,s}}{4\sqrt{2\kappa_s} (-R_s)^{5/2}} + \frac{3\sqrt{2\kappa_s} R_{vv,s}}{4(-R_s)^{5/2}} + \frac{15\sqrt{2\kappa_s} R_{v,s}^2}{8(-R_s)^{7/2}} \right) V_s \otimes V_s + \frac{3}{4} \frac{\sqrt{2\kappa_s} R_{vv,s}}{(-R_s)^{5/2}} W_s \otimes V_s. \end{aligned}$$

Il nous reste à calculer $S_s \cdot D_2 S_s$, pour cela, on utilise que S_s est orthogonal à V_s , W_s et T_s , ce que l'on montrera proprement dans le lemme 3.3.1. L'orthogonalité peut aussi être démontrée par un simple calcul. En tout cas ici, on a que

$$\begin{aligned} S_s \cdot D_2 S_s &= S_s \cdot \left(\nabla_{\text{tot}} B_0 + \frac{1}{2} (A_2 + 2B_2) \otimes V_s \right) S_s \\ &= S_s \cdot \nabla_{\text{tot}} B_0 S_s \\ &= \int_0^1 S_s \cdot \frac{\nabla_{\text{tot}} f(\mathcal{V}_\ell^s, v_s, v_s) - \nabla_{\text{tot}} (\mathcal{Y}_s V_s)}{\sigma} S_s d\sigma \\ &\quad + \int_0^1 S_s \cdot \frac{\nabla_{\text{tot}} f(\mathcal{V}_r^s, v_s, v_s) - \nabla_{\text{tot}} (\mathcal{Y}_s V_s)}{\sigma} S_s d\sigma \\ &\quad + S_s \cdot (V_s \otimes \nabla_{\text{tot}} [\ln(4(v_r^s - v_s)(v_s - v_\ell^s)(-R_s)) \mathcal{Y}_s]) S_s \\ &\quad + \ln(4(v_r^s - v_s)(v_s - v_\ell^s)(-R_s)) \mathcal{Y}_s S_s \cdot \nabla_{\text{tot}} V_s S_s. \end{aligned}$$

Or, on a déjà calculé, que

$$\begin{aligned} \nabla_{\text{tot}} V_s &= -T_s \otimes T_s - \frac{a_s^2}{2} W_s \otimes W_s, \\ \nabla_{\text{tot}} \mathcal{Y}_s &= -\frac{a_s^2}{4} \mathcal{Y}_s Z_s - (b_s \mathcal{Y}_s + \frac{a_s^2}{2} \mathcal{Y}_{v,s}) W_s. \end{aligned}$$

Et comme S_s est orthogonal à V_s , T_s et W_s on obtient que

$$\begin{aligned} S_s \cdot D_2 S_s &= \int_0^1 S_s \cdot \frac{\nabla_{\text{tot}} f(\mathcal{V}_\ell^s, v_s, v_s)}{\sigma} S_s d\sigma + \int_0^1 S_s \cdot \frac{\nabla_{\text{tot}} f(\mathcal{V}_r^s, v_s, v_s)}{\sigma} S_s d\sigma \\ &= \int_0^1 S_s \cdot \left(\nabla f^{s,\ell} + f_v^{s,\ell} \otimes \nabla v_\ell^s \right) S_s \frac{d\sigma}{\sigma} + \int_0^1 S_s \cdot \left(\nabla f^{s,r} + f_v^{s,r} \otimes \nabla v_r^s \right) S_s \frac{d\sigma}{\sigma}. \end{aligned}$$

Ici, on a utilisé que $\nabla v_s = -\frac{a_s^2}{2} W_s$, et pour toute fonction g , la notation suivante $g^{s,\ell} = g(\mathcal{V}_\ell^s, v_s, v_s)$, respectivement $g^{s,r} = g(\mathcal{V}_r^s, v_s, v_s)$.

Il nous reste plus qu'à identifier chaque intégrale. On va montrer que

$$d_c^2 \mathcal{M}_\ell = \int_0^1 S_s \cdot \left(\nabla f^{s,\ell} + f_v^{s,\ell} \otimes \nabla v_\ell^s \right) S_s \frac{d\sigma}{\sigma} \quad \text{et} \quad d_c^2 \mathcal{M}_r = \int_0^1 S_s \cdot \left(\nabla f^{s,r} + f_v^{s,r} \otimes \nabla v_r^s \right) S_s \frac{d\sigma}{\sigma}$$

Les calculs sont identiques pour les deux intégrales et identiques aux calculs dans la preuve du théorème 5 de [BGMR20]. On écrit donc ici que les détails pour le moment de Boussinesq du soliton à gauche, les calculs pour celui à droite étant identique.

On introduit \underline{U}_ℓ^s le profil du soliton à gauche qui a pour état à l'infini U_s et comme vitesse c . Le moment de Boussinesq est alors donné par

$$\mathcal{M}_\ell = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{H}[\underline{U}_\ell^s] + cQ(\underline{U}_\ell^s) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \underline{U}_\ell^s + \mu_s \right) dx,$$

avec $\boldsymbol{\lambda}_s = -\nabla_U (\mathcal{H} + cQ)(U_s, 0)$ et $\mu_s = -\boldsymbol{\lambda}_s \cdot U_s - (\mathcal{H} + cQ)(U_s, 0)$.

Comme d_c correspond à la dérivée selon la vitesse c avec l'état final U_s fixé, on a

$$\begin{aligned} d_c \boldsymbol{\lambda}_s &= -\nabla_U Q(U_s) = -B^{-1} U_s, \\ d_c \mu_s &= U_s \cdot B^{-1} U_s - Q(U_s) = Q(U_s). \end{aligned}$$

Or, on sait que $\delta(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}_\ell^s] + \boldsymbol{\lambda}_s = 0$, on obtient donc

$$\begin{aligned} d_c \mathcal{M}_\ell &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(Q(\underline{U}_\ell^s) + \delta(\mathcal{H} + cQ)[\underline{U}_\ell^s] \cdot d_c \underline{U}_\ell^s + \boldsymbol{\lambda}_s \cdot d_c \underline{U}_\ell^s + d_c \boldsymbol{\lambda}_s \cdot \underline{U}_\ell^s + d_c \mu_s \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(\underline{U}_\ell^s) + Q(U_s) - \underline{U}_\ell^s \cdot B^{-1} U_s dx \\ &= 2 \int_{v_\ell^s}^{v_r^s} \left(Q(\mathcal{U}) + Q(U_s) - \mathcal{U} \cdot B^{-1} U_s \right) \sqrt{\frac{\kappa(v)}{2(\mu_s - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c))}} dv, \end{aligned}$$

où $\mathcal{U}(v) = v$ dans le cas $N = 1$ et $\mathcal{U}(v) = (v, \mathbf{g}(v; \boldsymbol{\lambda}, c))^T$ si $N = 2$.

Or, on sait que pour $v \in]v_\ell^s, v_s[$, on a

$$\frac{\mathcal{Y}(v, v_s, v_s; \boldsymbol{\lambda}, c)}{-2(v - v_s)} = \sqrt{\frac{\kappa(v)}{2(\mu_s - \mathcal{W}(v; \boldsymbol{\lambda}, c))}}.$$

Ainsi en faisant le changement de variable $\mathcal{V}_\ell^s = v_s + \sigma(v_\ell^s - v_s)$ et en notant pour une fonction g , $g^{s,\ell} = g(\mathcal{V}_\ell^s, v_s, v_s)$, on obtient que

$$d_c \mathcal{M}_\ell = \int_0^1 \left(Q(\mathcal{U}^{s,\ell}) + Q(U_s) - \mathcal{U}^{s,\ell} \cdot B^{-1} U_s \right) \mathcal{Y}^{s,\ell} \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

De plus, on sait que $f^{s,\ell} = \mathcal{Y}^{s,\ell} \nabla \mathcal{L}^{s,\ell} = \mathcal{Y}^{s,\ell} (1, (\mathcal{U}^{s,\ell})^T, Q(\mathcal{U}^{s,\ell}))^T$ et $S_s = (-Q(U_s), (B^{-1} U_s)^T, -1)^T$. Ce qui donne

$$S_s \cdot f^{s,\ell} = - \left(Q(U_s) + Q(\mathcal{U}^{s,\ell}) - \mathcal{U}^{s,\ell} \cdot B^{-1} U_s \right) \mathcal{Y}^{s,\ell}.$$

Ainsi

$$d_c \mathcal{M}_\ell = \int_0^1 -S_s \cdot f^{s,\ell} \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Pour conclure, il suffit de voir que $d_c \boldsymbol{\lambda}_s = -B^{-1} U_s$ donc $d_c a(c, \boldsymbol{\lambda}_s) = \partial_c a + \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} a \cdot d_c \boldsymbol{\lambda}_s = -\nabla a \cdot S_s$. Ainsi, on a bien

$$d_c^2 \mathcal{M}_\ell = \int_0^1 S_s \cdot \left(\nabla f^{s,\ell} + \sigma f_v^{s,\ell} \otimes \nabla v_\ell^s \right) S_s \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Ce qui conclut cette preuve. □

3.3 Instabilité dans le cas limite

En utilisant le comportement asymptotique de $\nabla^2\Theta$, on peut en déduire $n(\nabla^2\Theta)$, et conclure, grâce au théorème 2.3.1, sur la stabilité ou l'instabilité pour les ondes périodiques à deux bosses de suffisamment grande période. Pour calculer la signature, on va exprimer la matrice dans une bonne base, c'est la même que celle utilisée dans [BGM20]. Les mineurs principaux seront alors plus simples à calculer. Le lemme suivant, tiré de [BGM20], permet d'introduire cette base.

Lemme 3.3.1. *On introduit la matrice symétrique suivante*

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & B^{-1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors on a $\mathbb{S}V_s = S_s$ est les relations suivantes

$$\begin{cases} V_s \cdot \mathbb{S}V_s = 0, & V_s \cdot \mathbb{S}W_s = 0, & V_s \cdot \mathbb{S}T_s = 0, & V_s \cdot \mathbb{S}Z_s = -W_s \cdot \mathbb{S}W_s, \\ T_s \cdot \mathbb{S}T_s = 0, & T_s \cdot \mathbb{S}Z_s = 0, \\ E \cdot V_s = 1, & E \cdot W_s = 0, & E \cdot Z_s = 0, & E_s \cdot T_s = 0, \end{cases}$$

où $E = (1, 0, 0, 0)^T$ si $N = 2$ et $E = (1, 0, 0)^T$ si $N = 1$.

De plus si $N = 2$, $(\mathbb{S}V_s, \mathbb{S}W_s, \mathbb{S}T_s, E)$ est une base de \mathbb{R}^4 et si $N = 1$, $(\mathbb{S}V_s, \mathbb{S}W_s, E)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Démonstration. Un simple calcul donne que $\mathbb{S}V_s = S_s$

Pour les relations d'orthogonalité, on peut directement les prouver en calculant les produits scalaires, mais ces relations sont directement liées aux propriétés vérifiées par \mathcal{L} et B . En effet, on a que si $X = \begin{pmatrix} 1 \\ U \\ q \end{pmatrix}$ alors

$$X \cdot \mathbb{S}X = X \cdot \begin{pmatrix} -q \\ B^{-1}U \\ -1 \end{pmatrix} = 2(Q(U) - q)$$

Ainsi comme $\nabla\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ U \\ Q(U) \end{pmatrix}$, on a

$$\nabla\mathcal{L} \cdot \mathbb{S}\nabla\mathcal{L} = 0.$$

Par symétrie de \mathbb{S} , en dérivant, on obtient que

$$\nabla\mathcal{L} \cdot \mathbb{S}\nabla^2\mathcal{L} = 0, \quad \nabla\mathcal{L} \cdot \mathbb{S}\nabla\mathcal{L}_v = 0 \quad \text{et} \quad \nabla\mathcal{L} \cdot \mathbb{S}\nabla\mathcal{L}_{vv} = -\nabla\mathcal{L}_v \cdot \mathbb{S}\nabla\mathcal{L}_v.$$

Ce qui évalué en v_s donne exactement

$$V_s \cdot \mathbb{S}V_s = 0, \quad V_s \cdot \mathbb{S}W_s = 0, \quad V_s \cdot \mathbb{S}T_s = 0, \quad \text{et} \quad V_s \cdot \mathbb{S}Z_s = -W_s \cdot \mathbb{S}W_s.$$

De même, comme $\partial_\mu\mathcal{L} = 1$ on a

$$E \cdot \nabla\mathcal{L} = 1.$$

Donc en dérivant et évaluant en v_s on obtient

$$E \cdot V_s = 1, \quad E \cdot W_s = 0, \quad E \cdot Z_s = 0, \quad \text{et} \quad E_s \cdot T_s = 0.$$

Dans le cas système, $N = 2$, pour les dernières relations, on a

$$T_s \cdot \mathbb{S}T_s = \frac{1}{\tau(v_s)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ v_s/b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v_s/b \\ B^{-1}(0, 1)^T \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau(v_s)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

et

$$T_s \cdot \mathbb{S} Z_s = \frac{1}{\sqrt{\tau(v_s)}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ v_s/b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Pour le dernier point, dans le cas $N = 2$, en posant $F = (0, 0, 0, -1)^T$, on remarque que dans la base canonique de \mathbb{R}^4 on a

$$\text{Mat}(V_s, W_s, T_s, F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1/\sqrt{\tau(v_s)} & 0 \\ * & * & * & -1 \end{pmatrix},$$

qui est inversible car $\tau > 0$.

Pour le cas $N = 1$, on pose $F = (0, 0, -1)^T$ et dans la base canonique de \mathbb{R}^3 on a

$$\text{Mat}(V_s, W_s, F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & -1 \end{pmatrix},$$

qui est aussi inversible.

Dans tous les cas, en multipliant par \mathbb{S} , qui est inversible, comme $\mathbb{S}F = E$, on obtient le résultat voulu. \square

On peut maintenant passer au théorème principal de cette partie qui va nous permettre de conclure sur les propriétés de stabilité pour certaines ondes.

Théorème 3.3.1. *Avec les hypothèses du théorème 2.3.1, pour des ondes périodiques à deux bosses de suffisamment grande période, on a les propriétés suivantes.*

- La période Ξ est strictement décroissante par rapport à μ , c'est-à-dire, $\partial_\mu \Xi = \partial_\mu^2 \Theta < 0$.
- Si $d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r \neq 0$ alors la matrice $\nabla^2 \Theta$ est inversible.
- De plus si $d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r > 0$ alors $n(\nabla^2 \Theta) = N + 1$ et donc l'onde périodique correspondante est spectralement instable.

Un corollaire immédiat de ce théorème est que la stabilité orbitale des deux solitons implique l'instabilité spectrale pour les ondes de suffisamment grande période.

Corollaire 3.3.2. *Supposons que les solitons à droite et à gauche sont orbitalement stables, alors les ondes périodiques à 2 bosses de suffisamment grandes périodes sont spectralement instables.*

Remarque 3.3.1. *On a vu à la remarque 3.0.1 à quoi correspondaient les ondes périodiques à double bosse pour l'équation intégrable, mKdV focalisante. L'équation étant intégrable, on a de nombreux résultats sur la stabilité de ces ondes périodiques, voir [KD15] et [CP25]. Tout d'abord, on peut se demander si les solitons sont stables, cela est fait notamment dans [AP09] et [KP13]. Dans notre cas pour $\lambda = 0$ tous les solitons sont stables. On rappelle que lorsque $\lambda = 0$ les ondes périodiques à double bosse sont à un scaling près*

$$\underline{v}(x) = k \text{cn}(x, k) \quad \text{où } c = 2k^2 - 1 > 0 \text{ et } \mu = k^2(1 - k^2).$$

Et que la limite qui nous intéresse correspond à $k \rightarrow 1$. Dans [KD15], les auteurs montrent qu'il existe $k^ \approx 0.909$ tel que pour tout $k > k^*$ les ondes périodiques sont spectralement instables vis-à-vis des perturbations co-périodique. Ainsi notre résultat est cohérent avec celui-ci. En utilisant l'intégrabilité, on peut même calculer numériquement le spectre complet de \mathcal{A} , c'est fait dans [CP25]. Dans la figure 1, on voit bien, lorsque $k \rightarrow 1$ que les valeurs propres, pour l'exposant de Floquet $\xi = 0$, sortent de l'axe des imaginaires purs. Ce sont ces valeurs propres qui, dans notre cas, nous donnent, pour les ondes périodiques de suffisamment grande période, l'instabilité spectrale.*

Démonstration. La preuve du théorème 3.3.1 est identique à celle dans le cas de la limite en soliton donné dans [BGM20]. L'idée est d'écrire la matrice $\nabla^2\Theta$ dans une bonne base pour pouvoir calculer facilement le signe de ces différents mineurs. Pour conclure, il nous suffit d'utiliser la règle de Sylvester pour connaître la signature de $\nabla^2\Theta$. On utilise la base introduit par le lemme 3.3.1, c'est-à-dire qu'on introduit les matrices inversibles suivantes

$$\mathbb{P}_s = (E, \mathbb{S}V_s, \mathbb{S}T_s, \mathbb{S}W_s) \text{ pour } N = 2, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_s = (E, \mathbb{S}V_s, \mathbb{S}W_s) \text{ pour } N = 1.$$

On commence par le cas $N = 2$. En utilisant le théorème 3.2.1 et les relations d'orthogonalité entre les vecteurs de la base données par le lemme 3.3.1, on obtient que

$$\mathbb{P}_s^T \nabla^2 \Theta \mathbb{P}_s = \begin{pmatrix} -\mathcal{Y}_s \varepsilon^{-2} - a_s \mathcal{Y}_s \varepsilon^{-1} + \mathcal{O}(\ln \varepsilon) & \mathcal{O}(\ln \varepsilon) & \mathcal{O}(\ln \varepsilon) & \mathcal{O}(\ln \varepsilon) \\ \mathcal{O}(\ln \varepsilon) & d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r + \mathcal{O}(\varepsilon \ln \varepsilon) & \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(\ln \varepsilon) & \mathcal{O}(1) & a_s^2 \mathcal{Y}_s (T_s \cdot \mathbb{S}W_s)^2 \times \ln \varepsilon + \mathcal{O}(1) & a_s^2 \mathcal{Y}_s (T_s \cdot \mathbb{S}W_s) (W_s \cdot \mathbb{S}W_s) \times \ln \varepsilon + \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(\ln \varepsilon) & \mathcal{O}(1) & a_s^2 \mathcal{Y}_s (T_s \cdot \mathbb{S}W_s) (W_s \cdot \mathbb{S}W_s) \times \ln \varepsilon + \mathcal{O}(1) & 2\mathcal{Y}_s (T_s \cdot \mathbb{S}W_s)^2 \ln \varepsilon + a_s^2 \mathcal{Y}_s (W_s \cdot \mathbb{S}W_s)^2 \ln \varepsilon + \mathcal{O}(1) \end{pmatrix}.$$

On peut calculer les différents mineurs principaux de cette matrice facilement. On obtient

$$\begin{aligned} \Delta_{1 \times 1} &= -\mathcal{Y}_s \varepsilon^{-2} - a_s \mathcal{Y}_s \varepsilon^{-1} + \mathcal{O}(\ln \varepsilon), \\ \Delta_{2 \times 2} &= -\mathcal{Y}_s (d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r) \varepsilon^{-2} + \mathcal{O}(\varepsilon^{-1} \ln \varepsilon), \\ \Delta_{3 \times 3} &= -a_s^2 \mathcal{Y}_s^2 (d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r) (T_s \cdot \mathbb{S}W_s)^2 \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^{-2}), \\ \Delta_{4 \times 4} &= \det(\mathbb{P}_s)^2 \det(\nabla^2 \Theta) = -2a_s^2 \mathcal{Y}_s^3 (d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r) (T_s \cdot \mathbb{S}W_s)^4 \frac{(\ln \varepsilon)^2}{\varepsilon^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^{-2} \ln \varepsilon). \end{aligned}$$

On peut directement lire le signe de $\partial_\mu \Xi$, en effet, on a

$$\partial_\mu \Xi = \partial_\mu^2 \Theta = E^T \nabla^2 \Theta E = -\mathcal{Y}_s \varepsilon^{-2} - a_s \mathcal{Y}_s \varepsilon^{-1} + \mathcal{O}(\ln \varepsilon).$$

Donc, on a bien que $\partial_\mu \Xi < 0$ pour ε assez petit.

Pour les autres points, comme $T_s \cdot \mathbb{S}W_s = b/\sqrt{\tau(v_s)} \neq 0$ et \mathbb{P}_s est inversible, on a bien que si $d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r \neq 0$ alors $\nabla^2 \Theta$ est inversible.

Dans ce cas, par la règle de Sylvester, $n(\nabla^2 \Theta)$ correspond au nombre de changements de signe dans

$$(+, \text{sign}(\Delta_{1 \times 1}), \text{sign}(\Delta_{2 \times 2}), \text{sign}(\Delta_{3 \times 3}), \text{sign}(\Delta_{4 \times 4})).$$

C'est-à-dire, pour ε assez petit, au nombre de changements de signe dans

$$(+, -, -\text{sign}(d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r), \text{sign}(d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r), -\text{sign}(d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r)).$$

Ainsi si $d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r > 0$ on a $n(\nabla^2 \Theta) = 3 = N + 1$ et on peut donc conclure à l'instabilité spectrale de l'onde période par le théorème 2.3.1. Dans l'autre cas, on a $n(\nabla^2 \Theta) = 4 = N + 2$ et on ne peut pas conclure sur la stabilité de l'onde périodique.

On traite maintenant le cas $N = 1$, ici la matrice s'écrit

$$\mathbb{P}_s^T \nabla^2 \Theta \mathbb{P}_s = \begin{pmatrix} -\mathcal{Y}_s \varepsilon^{-2} - a_s \mathcal{Y}_s \varepsilon^{-1} + \mathcal{O}(\ln \varepsilon) & \mathcal{O}(\ln \varepsilon) & \mathcal{O}(\ln \varepsilon) \\ \mathcal{O}(\ln \varepsilon) & d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r + \mathcal{O}(\varepsilon \ln \varepsilon) & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(\ln \varepsilon) & \mathcal{O}(1) & a_s^2 \mathcal{Y}_s (W_s \cdot \mathbb{S}W_s)^2 \ln \varepsilon + \mathcal{O}(1) \end{pmatrix}.$$

Les mineurs principaux sont donnés par

$$\begin{aligned}\Delta_{1 \times 1} &= -\mathcal{Y}_s \varepsilon^{-2} - a_s \mathcal{Y}_s \varepsilon^{-1} + \mathcal{O}(\ln \varepsilon), \\ \Delta_{2 \times 2} &= -\mathcal{Y}_s (d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r) \varepsilon^{-2} + \mathcal{O}(\varepsilon^{-1} \ln \varepsilon), \\ \Delta_{4 \times 4} &= \det(\mathbb{P}_s)^2 \det(\nabla^2 \Theta) = -2a_s^2 \mathcal{Y}_s^2 (d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r) (W_s \cdot \mathbb{S} W_s)^4 \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^{-2}).\end{aligned}$$

On a toujours

$$\partial_\mu \Xi = \partial_\mu^2 \Theta = E^T \nabla^2 \Theta E = -\mathcal{Y}_s \varepsilon^{-2} - a_s \mathcal{Y}_s \varepsilon^{-1} + \mathcal{O}(\ln \varepsilon).$$

Donc, on a bien que $\partial_\mu \Xi < 0$ pour ε assez petit.

Pour les autres points, comme $W_s \cdot \mathbb{S} W_s = b \neq 0$ et \mathbb{P}_s est inversible, on a bien que si $d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r \neq 0$ alors $\nabla^2 \Theta$ est inversible.

Dans ce cas, par la règle de Sylvester, $n(\nabla^2 \Theta)$ correspond, pour ε assez petit, au nombre de changements de signe dans

$$(+, -, -\text{sign}(d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r), \text{sign}(d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r)).$$

Ainsi si $d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r > 0$ on a $n(\nabla^2 \Theta) = 2 = N + 1$ et on peut donc conclure à l'instabilité spectrale de l'onde période par le théorème 2.3.1. Dans l'autre cas, on a $n(\nabla^2 \Theta) = 3 = N + 2$ et on ne peut pas conclure sur la stabilité de l'onde périodique. □

Remarque 3.3.2. *Dans la preuve, on peut comparer la matrice $\mathbb{P}_s^T \nabla^2 \Theta \mathbb{P}_s$ obtenue dans notre limite et celle obtenue dans la limite de grande période dans le corollaire 2 de [BGMR20]. Si on ne considère par le premier coefficient, qui correspond à $\partial_\mu \Xi$, on voit que la matrice obtenue ici est simplement la somme des matrices qui seraient obtenues par limite de grande période pour le soliton à gauche et par limite de grande période pour le soliton à droite.*

Remarque 3.3.3. *Dans le cas où l'on ne peut pas conclure, on pourrait espérer montrer de l'instabilité modulationnelle, c'est-à-dire qu'il existe un exposant de Floquet ξ proche de 0 tel que le linéarisé admet une valeur propre proche de 0 de partie réelle strictement positive pour cette exposant de Floquet. Un moyen de démontrer cela est d'étudier l'hyperbolicité du système modulé associé à l'onde. En effet, si ce système n'est pas hyperbolique alors l'onde est modulationnellement instable, ce critère provient du théorème 1 de [BGNR14]. On peut étudier le comportement asymptotique de ce système lorsque l'onde périodique converge vers un soliton ou une constante, cela est fait dans [BGMR21]. On pourrait donc espérer faire la même étude dans notre cas. Or ici lorsque $d_c^2 \mathcal{M}_\ell + d_c^2 \mathcal{M}_r < 0$, la preuve de notre théorème 3.3.1 montre que $\nabla^2 \Theta$ est définie négative. Ceci implique que dans ce cas le système modulé est hyperbolique, cela est dû au corollaire 1 dans [BGMR21] qui a déjà été montré dans [BGNR13] (proposition 2). Ainsi, de cette manière, on ne peut pas conclure, dans ce cas, à de l'instabilité modulationnelle.*

A Comportement asymptotique des intégrales

A.1 Développement de la forme générale

Pour ϕ une fonction régulière et en supposant l'hypothèse 2 vérifiée, l'objectif est de calculer pour $\varepsilon = \sqrt{\mu - \mu_s} \rightarrow 0$, le développement asymptotique de l'intégrale

$$I(\phi) = \int_{v_\ell}^{v_r} \frac{\phi(v)}{\sqrt{\mu - \mathcal{W}(v)}} dv.$$

On remarque que si $\mu > \mu_s$ alors $\mathcal{L} = \mu - \mathcal{W}(v)$ admet deux racines simples v_ℓ et v_r . Or à la limite $\mu = \mu_s$, $\mathcal{L} = \mu - \mathcal{W}(v)$ admet deux racines simples v_ℓ^s et v_r^s et une racine double v_s . C'est cette racine double qui concentre les difficultés. Grâce à l'hypothèse 2, on introduit un $\eta > 0$ tel que pour tout $(\mu, \lambda, c) \in \Omega$ dans un voisinage de (μ_s, λ, c) on a

$$\forall v \in [v_s(\lambda, c) - \eta, v_s(\lambda, c) + \eta], \quad \partial_v^2 \mathcal{W}(v; \lambda, c) < 0,$$

$$\forall v \in [v_\ell(\mu, \lambda, c), v_\ell^s(\lambda, c) + \eta], \quad \partial_v \mathcal{W}(v; \lambda, c) < 0 \quad \text{et} \quad \forall v \in [v_r^s(\lambda, c) - \eta, v_r(\mu, \lambda, c)], \quad \partial_v \mathcal{W}(v; \lambda, c) > 0.$$

On peut maintenant découper l'intégrale. Les termes sans difficultés sont les suivants

$$I_{m,r}(\phi) = \int_{v_s+\eta}^{v_r^s-\eta} \frac{\phi(v)}{\sqrt{\mu - \mathcal{W}(v)}} dv \quad \text{et} \quad I_{m,\ell}(\phi) = \int_{v_\ell^s+\eta}^{v_s-\eta} \frac{\phi(v)}{\sqrt{\mu - \mathcal{W}(v)}} dv.$$

Les développements asymptotiques pour ces intégrales sont calculés dans la sous-partie suivante, à la proposition A.1.1.

On a les termes avec les singularités d'ordre 1 au bord de l'intégrale,

$$I_r(\phi) := \int_{v_r^s-\eta}^{v_r} \frac{\phi(v)}{\sqrt{\mu - \mathcal{W}(v)}} dv \quad \text{et} \quad I_\ell(\phi) := \int_{v_\ell}^{v_\ell^s+\eta} \frac{\phi(v)}{\sqrt{\mu - \mathcal{W}(v)}} dv.$$

On calcule leurs développements asymptotiques à la proposition A.1.2 et à la proposition A.1.3.

Et il reste la dernière partie, la plus dure, qui est

$$I_\eta(\phi) = \int_{v_s-\eta}^{v_s+\eta} \frac{\phi(v)}{\sqrt{\mu - \mathcal{W}(v)}} dv,$$

dont le développement asymptotique est calculé dans la sous-partie A.1.3.

En ajoutant tous ces résultats, on obtient le théorème suivant, qui nous donne le comportement asymptotique de l'intégrale $I(\phi)$.

Théorème A.1.1. *Avec les notations 1 et 2 et l'hypothèse 2, pour $\varepsilon = \sqrt{\mu - \mu_s} \rightarrow 0$, on a le développement asymptotique suivant*

$$I(\phi) = A_0(\phi) \ln(\varepsilon) + B_0(\phi) + B_1(\phi) \varepsilon + A_2(\phi) \varepsilon^2 \ln(\varepsilon) + B_2(\phi) \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3 \ln(\varepsilon)),$$

où les coefficients sont donnés par

$$i) \quad A_0(\phi) = -\frac{2\phi_s}{\sqrt{-R_s}},$$

$$ii) \quad B_0(\phi) = \int_{v_\ell^s}^{v_s-\eta} \frac{\phi(v)}{|v - v_s| \sqrt{|R(v)|}} dv + \int_{v_s+\eta}^{v_r^s} \frac{\phi(v)}{|v - v_s| \sqrt{|R(v)|}} dv + 2 \frac{\phi_s}{\sqrt{-R_s}} \ln(2\eta \sqrt{-R_s}) \\ + \int_{v_s}^{v_s+\eta} \frac{1}{v - v_s} \left(\frac{\phi(v)}{\sqrt{-R(v)}} - \frac{\phi_s}{\sqrt{-R_s}} \right) dv + \int_{v_s-\eta}^{v_s} \frac{-1}{v - v_s} \left(\frac{\phi(v)}{\sqrt{-R(v)}} - \frac{\phi_s}{\sqrt{-R_s}} \right) dv,$$

$$iii) \quad B_1(\phi) = -2 \frac{\phi_s}{(-R_s)},$$

$$iv) A_2(\phi) = 3 \frac{\phi_{v,s} R_{v,s} + \phi_s R_{vv,s}}{4(-R_s)^{5/2}} + \frac{15\phi_s R_{v,s}^2}{8(-R_s)^{7/2}},$$

$$\begin{aligned} v) B_2(\phi) &= \frac{\phi_s}{2\eta^2(-R_s)^{3/2}} + \frac{\phi_s}{\eta(-R_s)^{3/2}} + \frac{3\phi_s R_{v,s}^2}{4(-R_s)^{7/2}} \left(\frac{31}{12} - \frac{5}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) \\ &+ \frac{\phi_{v,s} R_{v,s} + \phi_s R_{vv,s}}{2(-R_s)^{5/2}} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) \\ &- \int_{v_s+\eta}^{v_s^r-\eta} \frac{1}{2} \frac{\phi(v)}{(\mu_s - \mathcal{W}(v))^{3/2}} dv - \int_{v_\ell^s+\eta}^{v_s-\eta} \frac{1}{2} \frac{\phi(v)}{(\mu_s - \mathcal{W}(v))^{3/2}} dv \\ &+ \int_{v_\ell^s}^{v_\ell^s+\eta} \frac{\frac{v_\ell^s+\eta-v}{\eta} p_\ell^s \tilde{f}_v(v, v_r^s, v_\ell^s) + (p_r^s + p_\ell^s) \tilde{f}_z(v, v_r^s, v_\ell^s)}{\sqrt{-(v-v_r^s)(v-v_\ell^s)}} dv \\ &- \int_{v_\ell^s}^{v_\ell^s+\eta} \frac{\tilde{f}(v, v_r^s, v_\ell^s)}{2} \frac{p_r^s + \delta^s p_\ell^s}{\sqrt{(v-v_\ell^s)(v_r^s-v)^{3/2}}} dv \\ &+ \int_{v_r^s-\eta}^{v_r^s} \frac{\frac{v-v_r^s+\eta}{\eta} p_r^s \tilde{f}_v(v, v_r^s, v_\ell^s) + (p_r^s + p_\ell^s) \tilde{f}_z(v, v_r^s, v_\ell^s)}{\sqrt{-(v-v_r^s)(v-v_\ell^s)}} dv \\ &+ \int_{v_r^s-\eta}^{v_r^s} \frac{\tilde{f}(v, v_r^s, v_\ell^s)}{2} \frac{p_\ell^s + \delta^s p_r^s}{\sqrt{(v_r^s-v)(v-v_\ell^s)^{3/2}}} dv \\ &+ \int_{-\eta}^0 \int_0^1 \int_0^1 t^2(1-u) \left[-\frac{1}{2} \frac{\phi_{vv}}{(-R)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{\phi_v R_v}{(-R)^{5/2}} - \frac{3}{4} \frac{\phi R_{vv}}{(-R)^{5/2}} - \frac{15}{8} \frac{\phi R_v^2}{(-R)^{7/2}} \right] (v_s + utw) du dt dw \\ &+ \int_{-\eta}^0 \int_0^1 \int_0^1 \left[3 \frac{\phi_{vv} R_v + 2\phi_v R_{vv} + \phi R_{vvv}}{4(-R)^{5/2}} + \frac{15}{4} \frac{\phi_v R_v^2 + \frac{3}{2} \phi R_v R_{vv}}{(-R)^{7/2}} + \frac{105}{16} \frac{\phi R_v^3}{(-R)^{9/2}} \right] (v_s + utw) \\ &t^2(1-u) du dt dw \\ &+ \int_0^\eta \int_0^1 \int_0^1 t^2(1-u) \left[-\frac{1}{2} \frac{\phi_{vv}}{(-R)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{\phi_v R_v}{(-R)^{5/2}} - \frac{3}{4} \frac{\phi R_{vv}}{(-R)^{5/2}} - \frac{15}{8} \frac{\phi R_v^2}{(-R)^{7/2}} \right] (v_s + utw) du dt dw \\ &+ \int_0^\eta \int_0^1 \int_0^1 \left[-3 \frac{\phi_{vv} R_v + 2\phi_v R_{vv} + \phi R_{vvv}}{4(-R)^{5/2}} - \frac{15}{4} \frac{\phi_v R_v^2 + \frac{3}{2} \phi R_v R_{vv}}{(-R)^{7/2}} - \frac{105}{16} \frac{\phi R_v^3}{(-R)^{9/2}} \right] (v_s + utw) \\ &t^2(1-u) du dt dw \\ \text{où } \tilde{f}(v, w, z) &= \frac{\phi(v)}{\sqrt{\tilde{R}(v, w, z)}}, R(v) = \tilde{R}(v, v_s, v_s) \text{ et} \end{aligned}$$

$$\tilde{R}(v, w, z) = \int_0^1 \int_0^1 t \partial_v^2 \mathcal{W}(w + t(w-z) + tu(v-z)) du dt$$

Démonstration. Comme décrit précédemment, il nous suffit d'additionner les résultats des propositions A.1.1, A.1.2, A.1.3, A.1.5 et A.1.4. \square

A.1.1 Parties sans singularités

On s'intéresse à la partie sans singularités, c'est-à-dire que l'on regarde

$$I_{m,r}(\phi) = \int_{v_s+\eta}^{v_s^r-\eta} \frac{\phi(v)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \mu_s - \mathcal{W}(v)}} dv,$$

et

$$I_{m,\ell}(\phi) = \int_{v_\ell^s+\eta}^{v_s-\eta} \frac{\phi(v)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \mu_s - \mathcal{W}(v)}} dv.$$

Le calcul de leurs développements asymptotiques ne présente aucune difficulté et est présenté dans la proposition suivante.

Proposition A.1.1. *On a pour $\varepsilon \rightarrow 0$ les développements asymptotiques suivants*

$$I_{m,r}(\phi) = \int_{v_s+\eta}^{v_s^r-\eta} \frac{\phi(v)}{\sqrt{\mu_s - \mathcal{W}(v)}} dv - \varepsilon^2 \int_{v_s+\eta}^{v_s^r-\eta} \frac{1}{2} \frac{\phi(v)}{(\mu_s - \mathcal{W}(v))^{3/2}} dv + \mathcal{O}(\varepsilon^4),$$

et

$$I_{m,\ell}(\phi) = \int_{v_\ell^s+\eta}^{v_s-\eta} \frac{\phi(v)}{\sqrt{\mu_s - \mathcal{W}(v)}} dv - \varepsilon^2 \int_{v_\ell^s+\eta}^{v_s-\eta} \frac{1}{2} \frac{\phi(v)}{(\mu_s - \mathcal{W}(v))^{3/2}} dv + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Démonstration. Il suffit de faire le développement asymptotique de la racine, plus précisément

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \mu_s - \mathcal{W}(v)}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_s - \mathcal{W}(v)}} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{(\mu_s - \mathcal{W}(v))^{3/2}} + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

En intégrant, on obtient exactement les résultats voulus. □

A.1.2 Singularité au bord

On s'intéresse aux singularités au bord de l'intégrale, c'est-à-dire, on regarde les intégrales suivantes,

$$I_r(\phi) := \int_{v_r^s-\eta}^{v_r} \frac{\phi(v)}{\sqrt{\mu - \mathcal{W}(v)}} dv \quad \text{et} \quad I_\ell(\phi) := \int_{v_\ell}^{v_\ell^s+\eta} \frac{\phi(v)}{\sqrt{\mu - \mathcal{W}(v)}} dv.$$

On commence par écrire grâce à la formule de Taylor que

$$\mu - \mathcal{W}(v) = -(v - v_r)(v - v_\ell) \tilde{R}(v, v_r, v_\ell),$$

où $\tilde{R}(v, w, z) = \int_0^1 \int_0^1 t \partial_v^2 \mathcal{W}(w + t(w - z) + tu(v - z)) du dt$.

On remarque que par l'hypothèse 2, on peut choisir η tel que

$$\forall v \in [v_l, v_l^s + \eta] \cup [v_r^s - \eta, v_r], \quad R(v, v_s, v_l) > 0.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} I_r(\phi) &= \int_{v_r^s-\eta}^{v_r} \frac{\phi(v)}{\sqrt{-(v - v_r)(v - v_\ell) \tilde{R}(v, v_r, v_\ell)}} dv \\ &= \int_0^1 \frac{\phi(\mathcal{V}_r)}{\sqrt{-(\mathcal{V}_r - v_r)(\mathcal{V}_r - v_\ell) \tilde{R}(\mathcal{V}_r, v_r, v_\ell)}} (v_r - v_r^s + \eta) d\sigma, \end{aligned}$$

où on a posé $\mathcal{V}_r = v_r^s - \eta + \sigma(v_r - v_r^s + \eta)$.

On pose aussi $\delta_r = \frac{v_r^s - \eta - v_\ell}{v_r - v_r^s + \eta}$ et on a que

$$I_r(\phi) = \int_0^1 \frac{\phi(\mathcal{V}_r)}{\sqrt{(1 - \sigma)(\delta_r + \sigma) \tilde{R}(\mathcal{V}_r, v_r, v_\ell)}} d\sigma.$$

De même pour l'intégrale à gauche en posant $\mathcal{V}_\ell = v_\ell^s + \eta + \sigma(v_\ell - v_\ell^s - \eta)$ et $\delta_\ell = \frac{v_r - v_\ell^s - \eta}{v_\ell^s + \eta - v_\ell}$ on obtient par changement de variable que

$$I_\ell(\phi) = \int_0^1 \frac{\phi(\mathcal{V}_\ell)}{\sqrt{(1 - \sigma)(\delta_\ell + \sigma) \tilde{R}(\mathcal{V}_\ell, v_r, v_\ell)}} d\sigma.$$

On commence par traiter l'intégrale à droite. La proposition suivante donne son développement asymptotique.

Proposition A.1.2. *On a le développement asymptotique suivant*

$$I_r(\phi) = \int_{v_r^s - \eta}^{v_r^s} \frac{\tilde{f}(v, v_r^s, v_\ell^s)}{\sqrt{-(v - v_r^s)(v - v_\ell^s)}} dv + \varepsilon^2 \int_{v_r^s - \eta}^{v_r^s} \frac{\frac{v - v_r^s + \eta}{\eta} p_r^s \tilde{f}_v(v, v_r^s, v_\ell^s) + (p_r^s + p_\ell^s) \tilde{f}_z(v, v_r^s, v_\ell^s)}{\sqrt{-(v - v_r^s)(v - v_\ell^s)}} dv \\ + \varepsilon^2 \int_{v_r^s - \eta}^{v_r^s} \frac{\tilde{f}(v, v_r^s, v_\ell^s)}{2} \frac{p_\ell^s + \delta^s p_r^s}{\sqrt{(v_r^s - v)(v - v_\ell^s)^{3/2}}} dv + \mathcal{O}(\varepsilon^4),$$

où $\tilde{f}(v, w, z) = \frac{\phi(v)}{\sqrt{\tilde{R}(v, w, z)}}$.

Démonstration. On pose la fonction

$$\tilde{f}(v, w, z) = \frac{\phi(v)}{\sqrt{\tilde{R}(v, w, z)}}.$$

On remarque que comme \tilde{R} est symétrique en w et z , \tilde{f} est symétrique en w et z .

On introduit $\mathcal{V}_r^s = v_r^s - \eta + \eta\sigma$ et $\delta^s = \frac{v_r^s - \eta - v_\ell^s}{\eta}$. De plus, pour toute fonction g des variables (v, w, z) , on notera $g^{s,r} = g(\mathcal{V}_r^s, v_r^s, v_\ell^s)$. On commence par développer \tilde{f} en puissances de ε . Pour cela, on utilise les développements asymptotiques déjà calculés pour les racines dans la proposition 3.1.1.

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mathcal{V}_r, v_r, v_\ell) &= \tilde{f}^{s,r} + (\mathcal{V}_r - \mathcal{V}_r^s) \tilde{f}_v^{s,r} + (v_r - v_r^s) \tilde{f}_w^{s,r} + (v_\ell - v_\ell^s) \tilde{f}_z^{s,r} + \mathcal{O}((v_\ell - v_\ell^s)^2 + (v_r - v_r^s)^2 + (\mathcal{V}_r - \mathcal{V}_r^s)^2) \\ &= \tilde{f}^{s,r} + \sigma(v_r - v_r^s) \tilde{f}_v^{s,r} + ((v_r - v_r^s) + (v_\ell - v_\ell^s)) \tilde{f}_z^{s,r} + \mathcal{O}((v_\ell - v_\ell^s)^2 + (v_r - v_r^s)^2 + (\mathcal{V}_r - \mathcal{V}_r^s)^2) \\ &= \tilde{f}^{s,r} + \varepsilon^2 \sigma p_r^s \tilde{f}_v^{s,r} + \varepsilon^2 (p_r^s + p_\ell^s) \tilde{f}_z^{s,r} + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Il nous faut aussi calculer le développement de δ_r .

$$\begin{aligned} \delta_r &= \frac{v_r^s - \eta - v_\ell}{v_r - v_r^s + \eta} \\ &= (v_r^s - \eta - v_\ell^s - \varepsilon^2 p_\ell^s + \mathcal{O}(\varepsilon^4)) (\eta + \varepsilon^2 p_r^s + \mathcal{O}(\varepsilon^4))^{-1} \\ &= (v_r^s - \eta - v_\ell^s - \varepsilon^2 p_\ell^s + \mathcal{O}(\varepsilon^4)) \left(\frac{1}{\eta} - \frac{p_r^s}{\eta^2} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \right) \\ &= \delta^s - \varepsilon^2 \frac{p_\ell^s + \delta^s p_r^s}{\eta} + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Ceci nous permet de déduire que

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{f}(\mathcal{V}_r, v_r, v_\ell)}{\sqrt{\delta_r + \sigma}} &= (\tilde{f}^{s,r} + \varepsilon^2 \sigma p_r^s \tilde{f}_v^{s,r} + \varepsilon^2 (p_r^s + p_\ell^s) \tilde{f}_z^{s,r} + \mathcal{O}(\varepsilon^4)) \left(\frac{1}{\sqrt{\delta^s + \sigma}} + \frac{1}{2} \frac{p_\ell^s + \delta^s p_r^s}{\eta(\delta^s + \sigma)^{3/2}} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \right) \\ &= \frac{\tilde{f}^{s,r}}{\sqrt{\delta^s + \sigma}} + \frac{\sigma p_r^s \tilde{f}_v^{s,r} + (p_r^s + p_\ell^s) \tilde{f}_z^{s,r}}{\sqrt{\delta^s + \sigma}} \varepsilon^2 + \frac{\tilde{f}^{s,r}}{2} \frac{p_\ell^s + \delta^s p_r^s}{\eta(\delta^s + \sigma)^{3/2}} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

On peut donc conclure

$$I_r(\phi) = \int_0^1 \frac{\tilde{f}^{s,r}}{\sqrt{(1-\sigma)(\delta^s + \sigma)}} d\sigma + \varepsilon^2 \int_0^1 \frac{\sigma p_r^s \tilde{f}_v^{s,r} + (p_r^s + p_\ell^s) \tilde{f}_z^{s,r}}{\sqrt{(1-\sigma)(\delta^s + \sigma)}} d\sigma + \varepsilon^2 \int_0^1 \frac{\tilde{f}^{s,r}}{2} \frac{p_\ell^s + \delta^s p_r^s}{\eta \sqrt{1-\sigma} (\delta^s + \sigma)^{3/2}} d\sigma \\ + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Il reste juste à faire le changement de variable $v = v_r^s - \eta + \sigma\eta$ et on obtient le résultat voulu. \square

On fait de même pour l'intégrale à gauche, on obtient le résultat suivant.

Proposition A.1.3. *On a le développement asymptotique suivant*

$$I_\ell(\phi) = \int_{v_\ell^s}^{v_\ell^s + \eta} \frac{\tilde{f}(v, v_r^s, v_\ell^s)}{\sqrt{-(v - v_r^s)(v - v_\ell^s)}} dv + \varepsilon^2 \int_{v_\ell^s}^{v_\ell^s + \eta} \frac{\frac{v_\ell^s + \eta - v}{\eta} p_\ell^s \tilde{f}_v(v, v_r^s, v_\ell^s) + (p_r^s + p_\ell^s) \tilde{f}_z(v, v_r^s, v_\ell^s)}{\sqrt{-(v - v_r^s)(v - v_\ell^s)}} dv \\ - \varepsilon^2 \int_{v_\ell^s}^{v_\ell^s + \eta} \frac{\tilde{f}(v, v_r^s, v_\ell^s)}{2} \frac{p_r^s + \delta^s p_\ell^s}{\sqrt{(v - v_\ell^s)(v_r^s - v)^{3/2}}} dv + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

où $\tilde{f}(v, w, z) = \frac{\phi(v)}{\sqrt{\tilde{R}(v, w, z)}}$.

Démonstration. On introduit $\mathcal{V}_\ell^s = v_\ell^s + \eta - \eta\sigma$ et on rappelle que $\delta^s = \frac{v_r^s - \eta - v_\ell^s}{\eta}$. De plus, pour toute fonction g des variables (v, w, z) , on notera $g^{s,\ell} = g(\mathcal{V}_\ell^s, v_r^s, v_\ell^s)$. On commence par développer \tilde{f} en puissances de ε . Pour cela, on utilise les développements asymptotiques déjà calculés pour les racines dans la proposition 3.1.1.

$$\tilde{f}(\mathcal{V}_r, v_r, v_\ell) = \tilde{f}^{s,\ell} + (\mathcal{V}_\ell - \mathcal{V}_\ell^s) \tilde{f}_v^{s,\ell} + (v_r - v_r^s) \tilde{f}_w^{s,\ell} + (v_\ell - v_\ell^s) \tilde{f}_z^{s,\ell} + \mathcal{O}((v_\ell - v_\ell^s)^2 + (v_r - v_r^s)^2 + (\mathcal{V}_r - \mathcal{V}_r^s)^2) \\ = \tilde{f}^{s,\ell} + \sigma(v_\ell - v_\ell^s) \tilde{f}_v^{s,\ell} + ((v_r - v_r^s) + (v_\ell - v_\ell^s)) \tilde{f}_z^{s,\ell} + \mathcal{O}((v_\ell - v_\ell^s)^2 + (v_r - v_r^s)^2 + (\mathcal{V}_r - \mathcal{V}_r^s)^2) \\ = \tilde{f}^{s,\ell} + \varepsilon^2 \sigma p_\ell^s \tilde{f}_v^{s,\ell} + \varepsilon^2 (p_r^s + p_\ell^s) \tilde{f}_z^{s,\ell} + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Il nous faut aussi calculer le développement de δ_ℓ .

$$\delta_\ell = \frac{v_r - \eta - v_\ell^s}{v_\ell^s + \eta - v_\ell} \\ = (v_r^s - \eta - v_\ell^s + \varepsilon^2 p_r^s + \mathcal{O}(\varepsilon^4)) (\eta - \varepsilon^2 p_\ell^s + \mathcal{O}(\varepsilon^4))^{-1} \\ = (v_r^s - \eta - v_\ell^s + \varepsilon^2 p_r^s + \mathcal{O}(\varepsilon^4)) \left(\frac{1}{\eta} + \frac{p_\ell^s}{\eta^2} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \right) \\ = \delta^s + \varepsilon^2 \frac{p_r^s + \delta^s p_\ell^s}{\eta} + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Ceci nous permet de déduire que

$$\frac{\tilde{f}(\mathcal{V}_\ell, v_r, v_\ell)}{\sqrt{\delta_\ell + \sigma}} = \left(\tilde{f}^{s,\ell} + \varepsilon^2 \sigma p_\ell^s \tilde{f}_v^{s,\ell} + \varepsilon^2 (p_r^s + p_\ell^s) \tilde{f}_z^{s,\ell} + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\delta^s + \sigma}} - \frac{1}{2} \frac{p_r^s + \delta^s p_\ell^s}{\eta(\delta^s + \sigma)^{3/2}} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \right) \\ = \frac{\tilde{f}^{s,\ell}}{\sqrt{\delta^s + \sigma}} + \frac{\sigma p_\ell^s \tilde{f}_v^{s,\ell} + (p_r^s + p_\ell^s) \tilde{f}_z^{s,\ell}}{\sqrt{\delta^s + \sigma}} \varepsilon^2 - \frac{\tilde{f}^{s,\ell}}{2} \frac{p_r^s + \delta^s p_\ell^s}{\eta(\delta^s + \sigma)^{3/2}} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

On peut donc conclure

$$I_\ell(\phi) = \int_0^1 \frac{\tilde{f}^{s,\ell}}{\sqrt{(1-\sigma)(\delta^s + \sigma)}} d\sigma + \varepsilon^2 \int_0^1 \frac{\sigma p_\ell^s \tilde{f}_v^{s,\ell} + (p_r^s + p_\ell^s) \tilde{f}_z^{s,\ell}}{\sqrt{(1-\sigma)(\delta^s + \sigma)}} d\sigma - \varepsilon^2 \int_0^1 \frac{\tilde{f}^{s,\ell}}{2} \frac{p_r^s + \delta^s p_\ell^s}{\eta \sqrt{1-\sigma} (\delta^s + \sigma)^{3/2}} d\sigma \\ + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Il nous reste juste à faire le changement de variable $v = v_\ell^s + \eta - \sigma\eta$ et on obtient le résultat voulu. \square

A.1.3 Singularité du à la racine double

On s'occupe maintenant du terme autour de la singularité en v_s , c'est-à-dire que l'on cherche à regarder le développement asymptotique de

$$\begin{aligned} I_\eta(\phi) &= \int_{v_s-\eta}^{v_s+\eta} \frac{\phi(v)}{\sqrt{\mu-\mathcal{W}(v)}} dv \\ &= \int_{-\eta}^{\eta} \frac{\phi(v_s+w)}{\sqrt{\varepsilon^2-w^2\tilde{R}(v_s+w, v_s, v_s)}} dw \\ &= \int_{-\frac{\eta}{\varepsilon}}^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \frac{\phi(v_s+\varepsilon\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2\tilde{R}(v_s+\varepsilon\sigma, v_s, v_s)}} d\sigma, \end{aligned}$$

où a fait le changement de variable $w = \varepsilon\sigma$ et on a utilisé que

$$\mu - \mathcal{W}(v) = \varepsilon^2 + \mu_s - \mathcal{W}(v) = \varepsilon^2 - (v - v_s)^2 \tilde{R}(v, v_s, v_s) =: \varepsilon^2 - (v - v_s)^2 R(v),$$

et on a noté $\tilde{R}(v, v_s, v_s) = R(v)$. De plus par la définition de η , on sait que $R(v) < 0$ pour $v \in [v_s - \eta, v_s + \eta]$. Pour faciliter l'étude, on va séparer l'intégrale en 0, c'est-à-dire que l'on va regarder séparément

$$\int_0^{\eta} \frac{\phi(v_s+w)}{\sqrt{\varepsilon^2-w^2R(v_s+w)}} dw = \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \frac{\phi(v_s+\varepsilon\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2\tilde{R}(v_s+\varepsilon\sigma)}} d\sigma,$$

et

$$\int_{-\eta}^0 \frac{\phi(v_s+w)}{\sqrt{\varepsilon^2-w^2R(v_s+w)}} dw = \int_{-\frac{\eta}{\varepsilon}}^0 \frac{\phi(v_s+\varepsilon\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2\tilde{R}(v_s+\varepsilon\sigma)}} d\sigma.$$

Le développement asymptotique de l'intégrale négative sera déduit de celui de l'intégrale positive. On commence donc par se concentrer sur lui. Le développement commence par $\ln(\varepsilon)$ puis un terme borné en ε , l'objectif va être de les identifier. Pour cela, en utilisant la formule de Taylor reste intégral, on peut écrire

$$\frac{\phi(v_s+h)}{\sqrt{1-\sigma^2R(v_s+h)}} = \frac{\phi_s}{\sqrt{1-\sigma^2R_s}} + h \int_0^1 \frac{\phi_v(v_s+th)}{\sqrt{1-\sigma^2R(v_s+th)}} + \phi(v_s+th) \frac{\sigma^2 R_v(v_s+th)}{2(1-\sigma^2R(v_s+th))^{3/2}} dt.$$

Puis on va étudier les deux termes séparément. On commence par le premier terme qui va croître en $\ln(\varepsilon)$, en effet par le lemme A.2.1,

$$\begin{aligned} I_{\eta,+}^{-1}(\phi) &:= \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \frac{\phi_s}{\sqrt{1-\sigma^2R_s}} d\sigma \\ &= \phi_s \int_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{dx}{\sqrt{-R_s}} \\ &= \frac{\phi_s}{\sqrt{-R_s}} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x} \right) \right]_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \\ &= -\frac{\phi_s}{\sqrt{-R_s}} \ln(\varepsilon) + \frac{\phi_s}{\sqrt{-R_s}} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) + \frac{\phi_s}{\sqrt{-R_s}} \frac{\varepsilon^2}{-4\eta^2 R_s} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

L'autre terme est borné en ε car on a

$$\begin{aligned} I_{\eta,+}^0(\phi) &:= \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \varepsilon\sigma \int_0^1 \frac{\phi_v(v_s+t\varepsilon\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2R(v_s+t\varepsilon\sigma)}} + \phi(v_s+t\varepsilon\sigma) \frac{\sigma^2 R_v(v_s+t\varepsilon\sigma)}{2(1-\sigma^2R(v_s+t\varepsilon\sigma))^{3/2}} dt d\sigma \\ &= \int_0^{\eta} \int_0^1 \frac{\phi_v(v_s+tw)w}{\sqrt{\varepsilon^2-w^2R(v_s+tw)}} + \phi(v_s+tw) \frac{w^3 R_v(v_s+tw)}{2(\varepsilon^2-w^2R(v_s+tw))^{3/2}} dt dw. \end{aligned}$$

On peut simplement appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient

$$I_{\eta,+}^0(\phi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\eta,+}^{0,\text{lim}}(\phi) := \int_0^\eta \int_0^1 \frac{\phi_v(v_s + tw)}{\sqrt{-R(v_s + tw)}} + \phi(v_s + tw) \frac{R_v(v_s + tw)}{2(-R(v_s + tw))^{3/2}} dt dw.$$

Ainsi il nous reste seulement à calculer le développement asymptotique de $I_{\eta,+}^0(\phi) - I_{\eta,+}^{0,\text{lim}}(\phi)$ pour avoir celui de l'intégrale positive. Cela est fait dans la proposition suivante.

Proposition A.1.4. *On a le développement asymptotique suivant*

$$\int_0^\eta \frac{\phi(v_s + w)}{\sqrt{\varepsilon^2 - w^2 R(v_s + w)}} dw = A_0^{\eta,+}(\phi) \ln(\varepsilon) + B_0^{\eta,+}(\phi) + B_1^{\eta,+}(\phi) \varepsilon + A_2^{\eta,+}(\phi) \varepsilon^2 \ln(\varepsilon) + B_2^{\eta,+}(\phi) \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3 \ln(\varepsilon)),$$

où chaque coefficient est donné par

$$\begin{aligned} i) \quad & A_0^{\eta,+}(\phi) = -\frac{\phi_s}{\sqrt{-R_s}}, \\ ii) \quad & B_0^{\eta,+}(\phi) = \frac{\phi_s}{\sqrt{-R_s}} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) + \int_0^\eta \frac{1}{w} \left(\frac{\phi(v_s+w)}{\sqrt{-R(v_s+w)}} - \frac{\phi_s}{\sqrt{-R_s}} \right) dw, \\ iii) \quad & B_1^{\eta,+}(\phi) = -\frac{\phi_s}{-R_s} - \frac{\phi_s R_{v,s}}{(-R_s)^2}, \\ iv) \quad & A_2^{\eta,+}(\phi) = \frac{1}{4(-R_s)^{3/2}} \phi_{v,s} + \frac{3}{8(-R_s)^{5/2}} \phi_s R_{v,s} + 3 \frac{\phi_{v,s} R_{v,s} + \phi_s R_{vv,s}}{8(-R_s)^{5/2}} + \frac{15\phi_s R_{v,s}^2}{16(-R_s)^{7/2}}, \\ v) \quad & B_2^{\eta,+}(\phi) = \frac{\phi_s}{4\eta^2(-R_s)^{3/2}} + \frac{\phi_s}{2\eta(-R_s)^{3/2}} + \frac{\phi_{v,s}}{2(-R_s)^{3/2}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) + \frac{\phi_s R_{v,s}}{4(-R_s)^{5/2}} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) \\ & + \frac{3}{4} \frac{\phi_s R_{v,s}}{\eta(-R_s)^{5/2}} + \frac{3\phi_s R_{v,s}^2}{8(-R_s)^{7/2}} \left(\frac{31}{12} - \frac{5}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) + \frac{\phi_{v,s} R_{v,s} + \phi_s R_{vv,s}}{4(-R_s)^{5/2}} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) \\ & + \int_0^\eta \int_0^1 \int_0^1 t^2(1-u) \left[-\frac{1}{2} \frac{\phi_{vv}}{(-R)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{\phi_v R_v}{(-R)^{5/2}} - \frac{3}{4} \frac{\phi R_{vv}}{(-R)^{5/2}} - \frac{15}{8} \frac{\phi R_v^2}{(-R)^{7/2}} \right] (v_s + utw) dudt dw \\ & + \int_0^\eta \int_0^1 \int_0^1 \left[-3 \frac{\phi_{vv} R_v + 2\phi_v R_{vv} + \phi R_{vvv}}{4(-R)^{5/2}} - \frac{15}{4} \frac{\phi_v R_v^2 + \frac{3}{2} \phi R_v R_{vv}}{(-R)^{7/2}} - \frac{105}{16} \frac{\phi R_v^3}{(-R)^{9/2}} \right] (v_s + utw) \\ & t^2(1-u) dudt dw \end{aligned}$$

Démonstration. D'après la discussion précédente, il suffit de faire le développement de

$$\begin{aligned} I_{\eta,+}^0(\phi) - I_{\eta,+}^{0,\text{lim}}(\phi) &= \int_0^\eta \int_0^1 \frac{\phi_v(v_s + tw) w}{\sqrt{\varepsilon^2 - w^2 R(v_s + tw)}} - \frac{\phi_v(v_s + tw)}{\sqrt{-R(v_s + tw)}} dt dw \\ &+ \int_0^\eta \int_0^1 \phi(v_s + tw) \frac{w^3 R_v(v_s + tw)}{2(\varepsilon^2 - w^2 R(v_s + tw))^{3/2}} - \phi(v_s + tw) \frac{R_v(v_s + tw)}{2(-R(v_s + tw))^{3/2}} dt dw \\ &=: I_{\eta,+}^{0,1}(\phi) + I_{\eta,+}^{0,2}(\phi) \end{aligned}$$

On commence par traiter le premier terme, c'est-à-dire

$$I_{\eta,+}^{0,1}(\phi) = \int_0^\eta \int_0^1 \varepsilon \phi(v_s + t\varepsilon\sigma) \left(\frac{\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2 R(v_s + t\varepsilon\sigma)}} - \frac{1}{\sqrt{-R(v_s + t\varepsilon\sigma)}} \right) dt d\sigma.$$

Comme précédemment, on utilise un développement de Taylor avec reste intégral

$$\begin{aligned} \frac{\sigma \phi(v_s + th)}{\sqrt{1 - \sigma^2 R(v_s + th)}} - \frac{\phi(v_s + th)}{\sqrt{-R(v_s + th)}} &= \frac{\phi_s \sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2 R_s}} - \frac{\phi_s}{\sqrt{-R_s}} \\ &+ th \left(\frac{\phi_{v,s} \sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2 R_s}} - \frac{\phi_{v,s}}{\sqrt{-R_s}} + \phi_s \frac{R_{v,s} \sigma^3}{2(1 - \sigma^2 R_s)^{3/2}} - \phi_s \frac{R_{v,s}}{2(-R_s)^{3/2}} \right) \\ &+ (th)^2 \int_0^1 (1-u) f_1(v_s + u th, \sigma) du, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$f_1(\cdot, \sigma) = \frac{\phi_{vv}\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2 R}} - \frac{\phi_{vv}}{\sqrt{-R_s}} + 2\phi_v \left(\frac{R_v \sigma^3}{2(1-\sigma^2 R)^{3/2}} - \frac{R_v}{2(-R)^{3/2}} \right) + \phi \left(\frac{R_{vv}\sigma^3}{2(1-\sigma^2 R)^{3/2}} - \frac{R_{vv}}{2(-R)^{3/2}} \right) \\ + \frac{3}{4} \phi \left(\frac{R_v^2 \sigma^5}{(1-\sigma^2 R)^{5/2}} - \frac{R_v^2}{(-R)^{5/2}} \right).$$

On obtient donc que

$$I_{\eta,+}^{0,1}(\phi) = \phi_s \varepsilon \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2 R_s}} - \frac{1}{\sqrt{-R_s}} d\sigma \\ + \frac{1}{2} \phi_{v,s} \varepsilon^2 \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \frac{\sigma^2}{\sqrt{1-\sigma^2 R_s}} - \frac{\sigma}{\sqrt{-R_s}} d\sigma \\ + \frac{1}{4} \phi_s R_{v,s} \varepsilon^2 \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \frac{\sigma^4}{(1-\sigma^2 R_s)^{3/2}} - \frac{\sigma}{(-R_s)^{3/2}} d\sigma \\ + \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \int_0^1 \varepsilon (t\varepsilon\sigma)^2 \int_0^1 (1-u) f(v_s + ut\varepsilon\sigma, \sigma) du dt d\sigma.$$

Pour le deuxième terme et le troisième terme le $\frac{1}{2}$ provient de $\int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$.

On peut donner un développement des trois premiers termes en puissances de ε en utilisant les développements asymptotiques donnés par le lemme A.2.2. Pour le premier, on a

$$\phi_s \varepsilon \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2 R_s}} - \frac{1}{\sqrt{-R_s}} d\sigma = \frac{\phi_s}{\sqrt{-R_s}} \varepsilon \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \frac{\sqrt{-R_s} \sigma}{\sqrt{1-\sigma^2 R_s}} - 1 d\sigma \\ = \frac{\phi_s}{-R_s} \varepsilon \int_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 dx \\ = \frac{\phi_s}{-R_s} \varepsilon \left(-1 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\eta\sqrt{-R_s}} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right) \\ = -\frac{\phi_s}{-R_s} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\phi_s}{\eta(-R_s)^{3/2}} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Pour le deuxième, on a

$$\frac{1}{2} \phi_{v,s} \varepsilon^2 \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \frac{\sigma^2}{\sqrt{1-\sigma^2 R_s}} - \frac{\sigma}{\sqrt{-R_s}} d\sigma = \frac{1}{2(-R_s)} \phi_{v,s} \varepsilon^2 \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \frac{(-R_s)\sigma^2}{\sqrt{1-\sigma^2 R_s}} - \sigma\sqrt{-R_s} d\sigma \\ = \frac{1}{2(-R_s)^{3/2}} \phi_{v,s} \varepsilon^2 \int_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - x dx \\ = \frac{1}{2(-R_s)^{3/2}} \phi_{v,s} \varepsilon^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln(\varepsilon) - \frac{1}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \\ = \frac{1}{4(-R_s)^{3/2}} \phi_{v,s} \varepsilon^2 \ln(\varepsilon) + \frac{1}{2(-R_s)^{3/2}} \phi_{v,s} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Et pour le troisième terme, on a

$$\frac{1}{4} \phi_s R_{v,s} \varepsilon^2 \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \frac{\sigma^4}{(1-\sigma^2 R_s)^{3/2}} - \frac{\sigma}{(-R_s)^{3/2}} d\sigma = \frac{1}{4(-R_s)^{5/2}} \phi_s R_{v,s} \varepsilon^2 \int_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \frac{x^4}{(1+x)^{3/2}} - x dx \\ = \frac{1}{4(-R_s)^{5/2}} \phi_s R_{v,s} \varepsilon^2 \left(\frac{3}{2} \ln(\varepsilon) + \frac{5}{4} - \frac{3}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \\ = \frac{3}{8(-R_s)^{5/2}} \phi_s R_{v,s} \varepsilon^2 \ln(\varepsilon) + \frac{1}{4(-R_s)^{5/2}} \phi_s R_{v,s} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) \varepsilon^2 \\ + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$$

Le dernier terme est équivalent à une constante fois ε^2 . Pour connaître cette constante, il suffit d'utiliser le théorème de convergence dominée. On commence par faire le changement de variable $w = \varepsilon\sigma$ puis on a juste à passer à la limite

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \int_0^1 \varepsilon(t\varepsilon\sigma)^2 \int_0^1 (1-u) f_1(v_s + ut\varepsilon\sigma, \sigma) du dt d\sigma = \\ \int_0^\eta \int_0^1 \int_0^1 t^2(1-u) \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\frac{\phi_{vv} w^3}{\sqrt{\varepsilon^2 - w^2 R}} - \frac{\phi_{vv} w^2}{\sqrt{-R}} \right. \\ \left. + 2\phi_v \left(\frac{R_v w^5}{2(\varepsilon^2 - w^2 R)^{3/2}} - \frac{R_v w^2}{2(-R)^{3/2}} \right) \right. \\ \left. + \phi \left(\frac{R_{vv} w^5}{2(\varepsilon^2 - w^2 R)^{3/2}} - \frac{R_{vv} w^2}{2(-R)^{3/2}} \right) \right. \\ \left. + \frac{3}{4} \phi \left(\frac{R_v^2 w^7}{(\varepsilon^2 - w^2 R)^{5/2}} - \frac{R_v^2 w^2}{(-R)^{5/2}} \right) \right] (v_s + utw) du dt dw \\ \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\eta \int_0^1 \int_0^1 t^2(1-u) \left[-\frac{1}{2} \frac{\phi_{vv}}{(-R)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{\phi_v R_v}{(-R)^{5/2}} - \frac{3}{4} \frac{\phi R_{vv}}{(-R)^{5/2}} \right. \\ \left. - \frac{15}{8} \frac{\phi R_v^2}{(-R)^{7/2}} \right] (v_s + utw) du dt dw. \end{aligned}$$

Pour avoir le terme suivant en développement de ε il suffit d'étudier la différence avec la limite, repasser en la variable σ puis faire comme précédemment un développement de Taylor avec reste intégral en $\varepsilon\sigma$. On peut montrer alors que le terme de reste sera en $\mathcal{O}(\varepsilon^3 \ln(\varepsilon))$.

En regroupant tous les termes, on obtient bien le développement de $I_{\eta,+}^{0,1}(\phi)$ voulu à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^3 \ln(\varepsilon))$, en effet

$$\begin{aligned} I_{\eta,+}^{0,1}(\phi) = -\frac{\phi_s}{-R_s} \varepsilon + \left(\frac{1}{4(-R_s)^{3/2}} \phi_{v,s} + \frac{3}{8(-R_s)^{5/2}} \phi_s R_{v,s} \right) \varepsilon^2 \ln(\varepsilon) \\ + \left(\frac{1}{2} \frac{\phi_s}{\eta(-R_s)^{3/2}} + \frac{1}{2(-R_s)^{3/2}} \phi_{v,s} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) + \frac{1}{4(-R_s)^{5/2}} \phi_s R_{v,s} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) \right) \varepsilon^2 \\ + \int_0^\eta \int_0^1 \int_0^1 t^2(1-u) \left[-\frac{1}{2} \frac{\phi_{vv}}{(-R)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{\phi_v R_v}{(-R)^{5/2}} - \frac{3}{4} \frac{\phi R_{vv}}{(-R)^{5/2}} - \frac{15}{8} \frac{\phi R_v^2}{(-R)^{7/2}} \right] (v_s + utw) du dt dw \varepsilon^2 \\ + \mathcal{O}(\varepsilon^3 \ln(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Il nous reste à traiter le terme suivant

$$I_{\eta,+}^{0,2}(\phi) = \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \int_0^1 \varepsilon \phi(v_s + t\varepsilon\sigma) \left(\frac{\sigma^3 R_v(v_s + t\varepsilon\sigma)}{2(1 - \sigma^2 R(v_s + t\varepsilon\sigma))^{3/2}} - \frac{R_v(v_s + t\varepsilon\sigma)}{2(-R(v_s + t\varepsilon\sigma))^{3/2}} \right) dt d\sigma$$

On le traite de manière identique. On commence donc par faire un développement de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 en $\varepsilon\sigma$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\phi(v_s + th)\sigma^3 R_v(v_s + th)}{2(1 - \sigma^2 R(v_s + th))^{3/2}} - \frac{\phi(v_s + th)R_v(v_s + th)}{2(-R(v_s + th))^{3/2}} = \frac{\phi_s R_{v,s} \sigma^3}{2(1 - \sigma^2 R_s)^{3/2}} - \frac{\phi_s R_{v,s}}{2(-R_s)^{3/2}} \\ + th \left(\frac{\phi_{v,s} R_{v,s} + \phi_s R_{vv,s}}{2(1 - \sigma^2 R_s)^{3/2}} \sigma^3 - \frac{\phi_{v,s} R_{v,s} + \phi_s R_{vv,s}}{2(-R_s)^{3/2}} \right. \\ \left. + \frac{3}{4} \frac{\phi_s R_{v,s}^2}{(1 - \sigma^2 R_s)^{5/2}} \sigma^5 - \frac{3}{4} \frac{\phi_s R_{v,s}^2}{(-R_s)^{5/2}} \right) \\ + (th)^2 \int_0^1 (1-u) f_2(v_s + u th, \sigma) du, \end{aligned}$$

où on a posé

$$f_2(., \sigma) = \frac{\phi_{vv}R_v + 2\phi_v R_{vv} + \phi R_{vvv}}{2(1 - \sigma^2 R)^{3/2}} \sigma^3 - \frac{\phi_{vv}R_v + 2\phi_v R_{vv} + \phi R_{vvv}}{2(-R)^{3/2}} \\ + \frac{6\phi_v R_v^2 + \frac{3}{2}\phi R_v R_{vv}}{4(1 - \sigma^2 R)^{5/2}} \sigma^5 - \frac{6\phi_v R_v^2 + \frac{3}{2}\phi R_v R_{vv}}{4(-R)^{5/2}} \\ + \frac{15}{8} \frac{\phi R_v^3}{(1 - \sigma^2 R)^{7/2}} \sigma^7 - \frac{15}{8} \frac{\phi R_v^3}{(-R)^{7/2}}.$$

On obtient donc que

$$I_{\eta,+}^{0,2}(\phi) = \frac{\varepsilon}{2} \phi_s R_{v,s} \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \frac{\sigma^3}{(1 - \sigma^2 R_s)^{3/2}} - \frac{1}{(-R_s)^{3/2}} d\sigma \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} (\phi_{v,s} R_{v,s} + \phi_s R_{vv,s}) \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \frac{\sigma^4}{2(1 - \sigma^2 R_s)^{3/2}} - \frac{\sigma}{2(-R_s)^{3/2}} d\sigma \\ + \frac{3\varepsilon^2}{4} \frac{\phi_s R_{v,s}^2}{2} \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \frac{\sigma^6}{(1 - \sigma^2 R_s)^{5/2}} - \frac{\sigma}{(-R_s)^{5/2}} d\sigma \\ + \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \int_0^1 \varepsilon (t\varepsilon\sigma)^2 \int_0^1 (1-u) f_2(v_s + ut\varepsilon\sigma, \sigma) du dt d\sigma.$$

On traite chaque intégrale séparément comme précédemment en utilisant les développements asymptotiques calculés dans le lemme A.2.3. Pour la première intégrale, on obtient

$$\frac{\varepsilon}{2} \phi_s R_{v,s} \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \frac{\sigma^3}{(1 - \sigma^2 R_s)^{3/2}} - \frac{1}{(-R_s)^{3/2}} d\sigma = \frac{\varepsilon}{2(-R_s)^2} \phi_s R_{v,s} \int_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}} - 1 dx \\ = \frac{\varepsilon}{2(-R_s)^2} \phi_s R_{v,s} \left(-2 + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{\eta\sqrt{-R_s}} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right) \\ = -\frac{\phi_s R_{v,s}}{(-R_s)^2} \varepsilon + \frac{3}{4} \frac{\phi_s R_{v,s}}{\eta(-R_s)^{5/2}} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Pour la deuxième, on obtient

$$\frac{\phi_{v,s} R_{v,s} + \phi_s R_{vv,s}}{4} \varepsilon^2 \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \frac{\sigma^4}{(1 - \sigma^2 R_s)^{3/2}} - \frac{\sigma}{(-R_s)^{3/2}} d\sigma = \frac{\phi_{v,s} R_{v,s} + \phi_s R_{vv,s}}{4(-R_s)^{5/2}} \varepsilon^2 \int_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \frac{x^4}{(1+x)^{3/2}} - x dx \\ = \frac{\phi_{v,s} R_{v,s} + \phi_s R_{vv,s}}{4(-R_s)^{5/2}} \varepsilon^2 \left(\frac{3}{2} \ln(\varepsilon) + \frac{5}{4} - \frac{3}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \\ = 3 \frac{\phi_{v,s} R_{v,s} + \phi_s R_{vv,s}}{8(-R_s)^{5/2}} \varepsilon^2 \ln(\varepsilon) \\ + \frac{\phi_{v,s} R_{v,s} + \phi_s R_{vv,s}}{4(-R_s)^{5/2}} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) \varepsilon^2 \\ + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Et pour le troisième terme, on a

$$\frac{3\phi_s R_{v,s}^2 \varepsilon^2}{8} \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \frac{\sigma^6}{(1 - \sigma^2 R_s)^{5/2}} - \frac{\sigma}{(-R_s)^{5/2}} d\sigma = \frac{3\phi_s R_{v,s}^2}{8(-R_s)^{7/2}} \varepsilon^2 \int_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \frac{x^6}{(1+x^2)^{5/2}} - x dx \\ = \frac{3\phi_s R_{v,s}^2}{8(-R_s)^{7/2}} \varepsilon^2 \left(\frac{5}{2} \ln(\varepsilon) + \left(\frac{31}{12} - \frac{5}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \\ = \frac{15\phi_s R_{v,s}^2}{16(-R_s)^{7/2}} \varepsilon^2 \ln(\varepsilon) + \frac{3\phi_s R_{v,s}^2}{8(-R_s)^{7/2}} \left(\frac{31}{12} - \frac{5}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) \varepsilon^2 \\ + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Le dernier terme est lui d'ordre ε^2 . On fait le changement de variable $w = \varepsilon\sigma$ puis on utilise le théorème de convergence dominée pour calculer la limite. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{\frac{\eta}{\varepsilon}} \int_0^1 \varepsilon(t\varepsilon\sigma)^2 \int_0^1 (1-u) f_2(v_s + ut\varepsilon\sigma, \sigma) du dt d\sigma = \\ \int_0^\eta \int_0^1 \int_0^1 t^2(1-u) \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\frac{\phi_{vv}R_v + 2\phi_v R_{vv} + \phi R_{vvv}}{2(\varepsilon^2 - w^2R)^{3/2}} w^5 - \frac{\phi_{vv}R_v + 2\phi_v R_{vv} + \phi R_{vvv}}{2(-R)^{3/2}} w^2 \right. \\ \left. + \frac{6\phi_v R_v^2 + \frac{3}{2}\phi R_v R_{vv}}{4(\varepsilon^2 - w^2R)^{5/2}} w^7 - \frac{6\phi_v R_v^2 + \frac{3}{2}\phi R_v R_{vv}}{4(-R)^{5/2}} w^2 \right. \\ \left. + \frac{15}{8} \frac{\phi R_v^3}{(\varepsilon^2 - w^2R)^{7/2}} w^9 - \frac{15}{8} \frac{\phi R_v^3}{(-R)^{7/2}} w^2 \right] (v_s + utw) du dt dw \\ \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\eta \int_0^1 \int_0^1 t^2(1-u) \left[-3 \frac{\phi_{vv}R_v + 2\phi_v R_{vv} + \phi R_{vvv}}{4(-R)^{5/2}} - \frac{15}{4} \frac{\phi_v R_v^2 + \frac{3}{2}\phi R_v R_{vv}}{(-R)^{7/2}} \right. \\ \left. - \frac{105}{16} \frac{\phi R_v^3}{(-R)^{9/2}} \right] (v_s + utw) du dt dw. \end{aligned}$$

Comme précédemment, pour connaître l'ordre du terme d'après, dans le développement en ε , il faut repasser en la variable σ , puis refaire un développement de Taylor en $\varepsilon\sigma$. On obtient alors que le terme qui suit est en $\mathcal{O}(\varepsilon^3 \ln(\varepsilon))$.

En regroupant tous les termes, on obtient le développement de $I_{\eta,+}^{0,2}(\phi)$ à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^3 \ln(\varepsilon))$, en effet

$$\begin{aligned} I_{\eta,+}^{0,2}(\phi) = -\frac{\phi_s R_{v,s}}{(-R_s)^2} \varepsilon + \left(3 \frac{\phi_{v,s} R_{v,s} + \phi_s R_{vv,s}}{8(-R_s)^{5/2}} + \frac{15\phi_s R_{v,s}^2}{16(-R_s)^{7/2}} \right) \varepsilon^2 \ln(\varepsilon) \\ + \left(\frac{3}{4} \frac{\phi_s R_{v,s}}{\eta(-R_s)^{5/2}} + \frac{3\phi_s R_{v,s}^2}{8(-R_s)^{7/2}} \left(\frac{31}{12} - \frac{5}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) + \frac{\phi_{v,s} R_{v,s} + \phi_s R_{vv,s}}{4(-R_s)^{5/2}} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) \right) \varepsilon^2 \\ + \int_0^\eta \int_0^1 \int_0^1 \left[-3 \frac{\phi_{vv}R_v + 2\phi_v R_{vv} + \phi R_{vvv}}{4(-R)^{5/2}} - \frac{15}{4} \frac{\phi_v R_v^2 + \frac{3}{2}\phi R_v R_{vv}}{(-R)^{7/2}} - \frac{105}{16} \frac{\phi R_v^3}{(-R)^{9/2}} \right] (v_s + utw) \\ t^2(1-u) du dt dw \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3 \ln(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Pour conclure, il nous suffit de sommer les différents développements asymptotiques. De plus, pour simplifier l'écriture, on peut remarquer que

$$\begin{aligned} I_{\eta,+}^{0,\lim}(\phi) &= \int_0^\eta \int_0^1 \frac{\phi_v(v_s + tw)}{\sqrt{-R(v_s + tw)}} + \phi(v_s + tw) \frac{R_v(v_s + tw)}{2(-R(v_s + tw))^{3/2}} dt dw \\ &= \int_0^\eta \frac{1}{w} \left(\frac{\phi(v_s + w)}{\sqrt{-R(v_s + w)}} - \frac{\phi_s}{\sqrt{R_s}} \right) dw. \end{aligned}$$

□

On peut maintenant s'occuper de l'intégrale négative, dont le développement est donné par la proposition suivante.

Proposition A.1.5. *On a le développement asymptotique suivant*

$$\int_{-\eta}^0 \frac{\phi(v_s + w)}{\sqrt{\varepsilon^2 - w^2 R(v_s + w)}} dw = A_0^{\eta,-}(\phi) \ln(\varepsilon) + B_0^{\eta,-}(\phi) + B_1^{\eta,-}(\phi) \varepsilon + A_2^{\eta,-}(\phi) \varepsilon^2 \ln(\varepsilon) + B_2^{\eta,-}(\phi) \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3 \ln(\varepsilon)),$$

où chaque coefficient est donné par

$$i) A_0^{\eta,-}(\phi) = -\frac{\phi_s}{\sqrt{-R_s}},$$

$$ii) B_0^{\eta,-}(\phi) = \frac{\phi_s}{\sqrt{-R_s}} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) + \int_{-\eta}^0 -\frac{1}{w} \left(\frac{\phi(v_s + w)}{\sqrt{-R(v_s + w)}} - \frac{\phi_s}{\sqrt{R_s}} \right) dw,$$

$$iii) B_1^{\eta,-}(\phi) = -\frac{\phi_s}{-R_s} + \frac{\phi_s R_{v,s}}{(-R_s)^2},$$

$$iv) A_2^{\eta,-}(\phi) = -\frac{\phi_{v,s}}{4(-R_s)^{3/2}} - \frac{3\phi_s R_{v,s}}{8(-R_s)^{5/2}} + 3\frac{\phi_{v,s} R_{v,s} + \phi_s R_{vv,s}}{8(-R_s)^{5/2}} + \frac{15\phi_s R_{v,s}^2}{16(-R_s)^{7/2}},$$

$$v) B_2^{\eta,-}(\phi) = \frac{\phi_s}{4\eta^2(-R_s)^{3/2}} + \frac{\phi_s}{2\eta(-R_s)^{3/2}} - \frac{\phi_{v,s}}{2(-R_s)^{3/2}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) - \frac{\phi_s R_{v,s}}{4(-R_s)^{5/2}} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) \\ - \frac{3}{4} \frac{\phi_s R_{v,s}}{\eta(-R_s)^{5/2}} + \frac{3\phi_s R_{v,s}^2}{8(-R_s)^{7/2}} \left(\frac{31}{12} - \frac{5}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) + \frac{\phi_{v,s} R_{v,s} + \phi_s R_{vv,s}}{4(-R_s)^{5/2}} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) \\ + \int_{-\eta}^0 \int_0^1 \int_0^1 t^2(1-u) \left[-\frac{1}{2} \frac{\phi_{vv}}{(-R)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{\phi_v R_v}{(-R)^{5/2}} - \frac{3}{4} \frac{\phi R_{vv}}{(-R)^{5/2}} - \frac{15}{8} \frac{\phi R_v^2}{(-R)^{7/2}} \right] (v_s + utw) dudt dw \\ + \int_{-\eta}^0 \int_0^1 \int_0^1 \left[3 \frac{\phi_{vv} R_v + 2\phi_v R_{vv} + \phi R_{vvv}}{4(-R)^{5/2}} + \frac{15}{4} \frac{\phi_v R_v^2 + \frac{3}{2} \phi R_v R_{vv}}{(-R)^{7/2}} + \frac{105}{16} \frac{\phi R_v^3}{(-R)^{9/2}} \right] (v_s + utw) \\ t^2(1-u) dudt dw$$

Démonstration. On va utiliser le développement déjà calculé dans le cas de l'intégrale positive. Pour cela, on remarque qu'en posant $\tilde{w} = -w$ on obtient

$$\int_{-\eta}^0 \frac{\phi(v_s + w)}{\sqrt{\varepsilon^2 - w^2 R(v_s + w)}} dw = \int_0^\eta \frac{\phi(v_s - \tilde{w})}{\sqrt{\varepsilon^2 - \tilde{w}^2 R(v_s - \tilde{w})}} d\tilde{w}$$

On pose donc $\tilde{R}(v_s + h) := R(v_s - h)$, c'est-à-dire $\tilde{R}(v) = R(2v_s - v)$ et de même $\tilde{\phi}(v_s + h) = \phi(v_s - h)$. Ainsi, on obtient que

$$\int_{-\eta}^0 \frac{\phi(v_s + w)}{\sqrt{\varepsilon^2 - w^2 R(v_s + w)}} dw = \int_0^\eta \frac{\tilde{\phi}(v_s + \tilde{w})}{\sqrt{\varepsilon^2 - \tilde{w}^2 \tilde{R}(v_s + \tilde{w})}} d\tilde{w}$$

On peut donc maintenant utiliser la proposition A.1.4, qui nous donne

$$\int_{-\eta}^0 \frac{\phi(v_s + w)}{\sqrt{\varepsilon^2 - w^2 R(v_s + w)}} dw = A_0^{\eta,+}(\tilde{\phi}) \ln(\varepsilon) + B_0^{\eta,+}(\tilde{\phi}) + B_1^{\eta,+}(\tilde{\phi}) \varepsilon + A_2^{\eta,+}(\tilde{\phi}) \varepsilon^2 \ln(\varepsilon) + B_2^{\eta,+}(\tilde{\phi}) \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3 \ln(\varepsilon)),$$

où chaque coefficient est donné par

$$i) A_0^{\eta,+}(\tilde{\phi}) = -\frac{\tilde{\phi}_s}{\sqrt{-\tilde{R}_s}},$$

$$ii) B_0^{\eta,+}(\tilde{\phi}) = \frac{\tilde{\phi}_s}{\sqrt{-\tilde{R}_s}} \ln(2\eta\sqrt{-\tilde{R}_s}) + \int_0^\eta \frac{1}{\tilde{w}} \left(\frac{\tilde{\phi}(v_s + \tilde{w})}{\sqrt{-\tilde{R}(v_s + \tilde{w})}} - \frac{\tilde{\phi}_s}{\sqrt{-\tilde{R}_s}} \right) d\tilde{w},$$

$$iii) B_1^{\eta,+}(\tilde{\phi}) = -\frac{\tilde{\phi}_s}{-\tilde{R}_s} - \frac{\tilde{\phi}_s \tilde{R}_{v,s}}{(-\tilde{R}_s)^2},$$

$$iv) A_2^{\eta,+}(\tilde{\phi}) = \frac{1}{4(-\tilde{R}_s)^{3/2}} \tilde{\phi}_{v,s} + \frac{3}{8(-\tilde{R}_s)^{5/2}} \tilde{\phi}_s \tilde{R}_{v,s} + 3\frac{\tilde{\phi}_{v,s} \tilde{R}_{v,s} + \tilde{\phi}_s \tilde{R}_{vv,s}}{8(-\tilde{R}_s)^{5/2}} + \frac{15\tilde{\phi}_s \tilde{R}_{v,s}^2}{15(-\tilde{R}_s)^{7/2}},$$

$$v) B_2^{\eta,+}(\tilde{\phi}) = \frac{\tilde{\phi}_s}{4\eta^2(-\tilde{R}_s)^{3/2}} + \frac{\tilde{\phi}_s}{2\eta(-\tilde{R}_s)^{3/2}} + \frac{\tilde{\phi}_{v,s}}{2(-\tilde{R}_s)^{3/2}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln(2\eta\sqrt{-\tilde{R}_s}) \right) + \frac{\tilde{\phi}_s \tilde{R}_{v,s}}{4(-\tilde{R}_s)^{5/2}} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \ln(2\eta\sqrt{-\tilde{R}_s}) \right) \\ + \frac{3}{4} \frac{\tilde{\phi}_s \tilde{R}_{v,s}}{\eta(-\tilde{R}_s)^{5/2}} + \frac{3\tilde{\phi}_s \tilde{R}_{v,s}^2}{8(-\tilde{R}_s)^{7/2}} \left(\frac{31}{12} - \frac{5}{2} \ln(2\eta\sqrt{-\tilde{R}_s}) \right) + \frac{\tilde{\phi}_{v,s} \tilde{R}_{v,s} + \tilde{\phi}_s \tilde{R}_{vv,s}}{4(-\tilde{R}_s)^{5/2}} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \ln(2\eta\sqrt{-\tilde{R}_s}) \right) \\ + \int_0^\eta \int_0^1 \int_0^1 t^2(1-u) \left[-\frac{1}{2} \frac{\tilde{\phi}_{vv}}{(-\tilde{R})^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{\tilde{\phi}_v \tilde{R}_v}{(-\tilde{R})^{5/2}} - \frac{3}{4} \frac{\tilde{\phi} \tilde{R}_{vv}}{(-\tilde{R})^{5/2}} - \frac{15}{8} \frac{\tilde{\phi} \tilde{R}_v^2}{(-\tilde{R})^{7/2}} \right] (v_s + ut\tilde{w}) dudt d\tilde{w} \\ + \int_0^\eta \int_0^1 \int_0^1 \left[-3 \frac{\tilde{\phi}_{vv} \tilde{R}_v + 2\tilde{\phi}_v \tilde{R}_{vv} + \tilde{\phi} \tilde{R}_{vvv}}{4(-\tilde{R})^{5/2}} - \frac{15}{4} \frac{\tilde{\phi}_v \tilde{R}_v^2 + \frac{3}{2} \tilde{\phi} \tilde{R}_v \tilde{R}_{vv}}{(-\tilde{R})^{7/2}} - \frac{105}{16} \frac{\tilde{\phi} \tilde{R}_v^3}{(-\tilde{R})^{9/2}} \right] (v_s + ut\tilde{w}) \\ t^2(1-u) dudt d\tilde{w}$$

Il ne reste plus qu'à faire le changement de variable $w = -\tilde{w}$ dans les intégrales et d'exprimer les dérivées de \tilde{R} et $\tilde{\phi}$ en fonction de R et ϕ . Pour cela, on utilise que $\tilde{R}_v(v_s + h) = -R_v(v_s - h)$ et de même pour $\tilde{\phi}$. On obtient donc que

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad & A_0^{\eta,+}(\tilde{\phi}) = -\frac{\phi_s}{\sqrt{-R_s}} = A_0^{\eta,-}(\phi), \\
\text{ii)} \quad & B_0^{\eta,+}(\tilde{\phi}) = \frac{\phi_s}{\sqrt{-R_s}} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) + \int_{-\eta}^0 -\frac{1}{w} \left(\frac{\phi(v_s+w)}{\sqrt{-R(v_s+w)}} - \frac{\phi_s}{\sqrt{R_s}} \right) dw = B_0^{\eta,-}(\phi), \\
\text{iii)} \quad & B_1^{\eta,+}(\tilde{\phi}) = -\frac{\phi_s}{-R_s} + \frac{\phi_s R_{v,s}}{(-R_s)^2} = B_1^{\eta,-}(\phi), \\
\text{iv)} \quad & A_2^{\eta,+}(\tilde{\phi}) = -\frac{\phi_{v,s}}{4(-R_s)^{3/2}} - \frac{3\phi_s R_{v,s}}{8(-R_s)^{5/2}} + 3\frac{\phi_{v,s} R_{v,s} + \phi_s R_{vv,s}}{8(-R_s)^{5/2}} + \frac{15\phi_s R_{v,s}^2}{16(-R_s)^{7/2}} = A_2^{\eta,-}(\phi), \\
\text{v)} \quad & B_2^{\eta,+}(\tilde{\phi}) = \frac{\phi_s}{4\eta^2(-R_s)^{3/2}} + \frac{\phi_s}{2\eta(-R_s)^{3/2}} - \frac{\phi_{v,s}}{2(-R_s)^{3/2}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) - \frac{\phi_s R_{v,s}}{4(-R_s)^{5/2}} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) \\
& - \frac{3}{4} \frac{\phi_s R_{v,s}}{\eta(-R_s)^{5/2}} + \frac{3\phi_s R_{v,s}^2}{8(-R_s)^{7/2}} \left(\frac{31}{12} - \frac{5}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) + \frac{\phi_{v,s} R_{v,s} + \phi_s R_{vv,s}}{4(-R_s)^{5/2}} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) \\
& + \int_{-\eta}^0 \int_0^1 \int_0^1 t^2(1-u) \left[-\frac{1}{2} \frac{\phi_{vv}}{(-R)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{\phi_v R_v}{(-R)^{5/2}} - \frac{3}{4} \frac{\phi R_{vv}}{(-R)^{5/2}} - \frac{15}{8} \frac{\phi R_v^2}{(-R)^{7/2}} \right] (v_s + utw) dudtdw \\
& + \int_{-\eta}^0 \int_0^1 \int_0^1 \left[3 \frac{\phi_{vv} R_v + 2\phi_v R_{vv} + \phi R_{vvv}}{4(-R)^{5/2}} + \frac{15}{4} \frac{\phi_v R_v^2 + \frac{3}{2} \phi R_v R_{vv}}{(-R)^{7/2}} + \frac{105}{16} \frac{\phi R_v^3}{(-R)^{9/2}} \right] (v_s + utw) \\
& t^2(1-u) dudtdw \\
& = B_2^{\eta,-}(\phi)
\end{aligned}$$

Ce qui conclut cette preuve. □

A.2 Développement asymptotique de différentes intégrales.

Ici, on réunit quelques développements asymptotiques d'intégrales que l'on a utilisés dans cette partie.

Lemme A.2.1. *Pour $\varepsilon \rightarrow 0$, on a le développement asymptotique suivant*

$$\int_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = -\ln(\varepsilon) + \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) + \frac{\varepsilon^2}{4\eta^2(-R_s)} + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Démonstration. On peut directement calculer l'intégrale puis faire un développement en ε , ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2} - x} \right) \right]_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \\
&= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2(-R_s)} + \eta\sqrt{-R_s}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2(-R_s)} - \eta\sqrt{-R_s}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\eta^2(-R_s) + 2\eta\sqrt{-R_s}\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2(-R_s)} + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \right) \\
&= -\ln(\varepsilon) + \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4\eta^2(-R_s)} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4\eta^2(-R_s)} \right) \\
&= -\ln(\varepsilon) + \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) + \frac{\varepsilon^2}{4\eta^2(-R_s)} + \mathcal{O}(\varepsilon^4).
\end{aligned}$$

A la dernière ligne, on a utilisé que

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4\eta^2(-R_s)} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4\eta^2(-R_s)}} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{\eta^2(-R_s)} + \frac{\varepsilon^2}{4\eta^2(-R_s)}} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\eta^2(-R_s)} + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\right) + \frac{\varepsilon^2}{4\eta^2(-R_s)} \\
&= \frac{\varepsilon^2}{2\eta^2(-R_s)} + \mathcal{O}(\varepsilon^4).
\end{aligned}$$

□

Lemme A.2.2. *Les différentes intégrales admettent, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, les développements asymptotiques suivants*

i)

$$\int_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon} - 1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\eta\sqrt{-R_s}} + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

ii)

$$\int_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2}\frac{\eta^2(-R_s)}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2}\ln(\varepsilon) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln(2\eta\sqrt{-R_s}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

iii)

$$\int_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \frac{x^4}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{3}{2}\ln(\varepsilon) + \frac{5}{4} - \frac{3}{2}\ln(2\eta\sqrt{-R_s}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Démonstration. On peut calculer explicitement ces intégrales, après, il suffit d'utiliser les développements asymptotiques classiques. On obtient

i)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \\
&= \frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{(\eta\sqrt{-R_s})^2}} - 1 \\
&= \frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon} - 1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\eta\sqrt{-R_s}} + \mathcal{O}(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)\right]_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}\right)^2 \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{\eta^2(-R_s)}} - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2(-R_s)} + \eta\sqrt{-R_s}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2(-R_s)} - \eta\sqrt{-R_s}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\eta^2(-R_s)}\right) - \left(-\frac{1}{2}\ln(\varepsilon) + \frac{1}{2}\ln(2\eta\sqrt{-R_s})\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{1}{2}\ln(\varepsilon) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln(2\eta\sqrt{-R_s}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \frac{x^4}{(1+x)^{3/2}} dx &= \left[\frac{x^3 + 3x}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{3}{4} \ln \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2} - x} \right) \right]_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \\
&= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon} \right)^3 + \frac{3}{2} \frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon} \right) \frac{\varepsilon}{\eta\sqrt{-R_s}} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{(\eta\sqrt{-R_s})^2} \right)^{-1/2} \\
&\quad - \frac{3}{4} \ln \left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2(-R_s)} + \eta\sqrt{-R_s}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2(-R_s)} - \eta\sqrt{-R_s}} \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon} \right)^2 + \frac{3}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{\eta\sqrt{-R_s}} \right)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \right) + \frac{3}{2} \ln(\varepsilon) - \frac{3}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon} \right)^2 + \frac{3}{2} \ln(\varepsilon) + \frac{5}{4} - \frac{3}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

□

Lemme A.2.3. *Les différentes intégrales admettent, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, les développements asymptotiques suivants*

i)

$$\int_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon} - 2 + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{\eta\sqrt{-R_s}} + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

ii)

$$\int_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \frac{x^6}{(1+x^2)^{5/2}} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon} \right)^2 + \frac{5}{2} \ln(\varepsilon) + \left(\frac{31}{12} - \frac{5}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Démonstration. On fait comme les lemmes précédents.

i)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}} dx &= \left[\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2+1}} \right]_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \\
&= \frac{\varepsilon}{\eta\sqrt{-R_s}} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{(\eta\sqrt{-R_s})^2} \right)^{-1/2} \left(\left(\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon} \right)^2 + 2 \right) - 2 \\
&= \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{(\eta\sqrt{-R_s})^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \right) \left(\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon} + 2 \frac{\varepsilon}{\eta\sqrt{-R_s}} \right) - 2 \\
&= \frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon} - 2 + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{\eta\sqrt{-R_s}} + \mathcal{O}(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \frac{x^6}{(1+x^2)^{5/2}} dx &= \left[\frac{3x^5 + 20x^3 + 15x}{6(x^2+1)^{3/2}} - \frac{5}{4} \ln \left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x} \right) \right]_0^{\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon}} \\
&= \frac{1}{6} \left(\frac{\varepsilon}{\eta\sqrt{-R_s}} \right)^3 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{(\eta\sqrt{-R_s})^2} \right)^{-3/2} \left(3 \left(\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon} \right)^5 + 20 \left(\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon} \right)^3 + 15 \frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon} \right) \\
&\quad - \frac{5}{4} \ln \left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2(-R_s)} + \eta\sqrt{-R_s}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2(-R_s)} - \eta\sqrt{-R_s}} \right) \\
&= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\varepsilon}{\eta\sqrt{-R_s}} \right)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \right) \left(3 \left(\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon} \right)^2 + 20 + 15 \left(\frac{\varepsilon}{\eta\sqrt{-R_s}} \right)^2 \right) \\
&\quad + \frac{5}{2} \ln(\varepsilon) - \frac{5}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\eta\sqrt{-R_s}}{\varepsilon} \right)^2 + \frac{5}{2} \ln(\varepsilon) + \left(\frac{31}{12} - \frac{5}{2} \ln(2\eta\sqrt{-R_s}) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

□

Références

- [AP09] Jaime Angulo Pava. Nonlinear dispersive equations. Existence and stability of solitary and periodic travelling wave solutions., volume 156 of Math. Surv. Monogr. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2009.
- [BGDD06] Sylvie Benzoni-Gavage, Raphaël Danchin, and Stéphane Descombes. Well-posedness of one-dimensional Korteweg models. Electron. J. Differ. Equ., 2006 :35, 2006. Id/No 59.
- [BGDD07] S. Benzoni-Gavage, R. Danchin, and S. Descombes. On the well-posedness for the Euler-Korteweg model in several space dimensions. Indiana Univ. Math. J., 56(4) :1499–1579, 2007.
- [BGMR16] S. Benzoni-Gavage, C. Mietka, and L. M. Rodrigues. Co-periodic stability of periodic waves in some Hamiltonian PDEs. Nonlinearity, 29(11) :3241–3308, 2016.
- [BGMR20] S. Benzoni-Gavage, C. Mietka, and L. M. Rodrigues. Stability of periodic waves in Hamiltonian PDEs of either long wavelength or small amplitude. Indiana Univ. Math. J., 69(2) :545–619, 2020.
- [BGMR21] Sylvie Benzoni-Gavage, Colin Mietka, and Luis Miguel Rodrigues. Modulated equations of Hamiltonian PDEs and dispersive shocks. Nonlinearity, 34(1) :578–641, 2021.
- [BGNR13] Sylvie Benzoni-Gavage, Pascal Noble, and Luis Miguel Rodrigues. Stability of periodic waves in Hamiltonian PDEs. Preprint, arXiv :1312.1964 [math.AP] (2013), 2013.
- [BGNR14] S. Benzoni-Gavage, P. Noble, and L. M. Rodrigues. Slow modulations of periodic waves in Hamiltonian PDEs, with application to capillary fluids. J. Nonlinear Sci., 24(4) :711–768, 2014.
- [CP25] Shikun Cui and Dmitry E. Pelinovsky. Instability bands for periodic traveling waves in the modified korteweg-de vries equation, 2025.
- [DBGN15] Stephan De Bièvre, François Genoud, and Simona Rota Nodari. Orbital stability : analysis meets geometry. In Nonlinear optical and atomic systems. At the interface of physics and mathematics. Based on lecture notes given at the 2013 Painlevé-CEMPI-PhLAM thematic semester., pages 147–273. Cham : Springer; Lille : Centre Européen pour les Mathématiques, la Physiques et leurs Interactions (CEMPI), 2015.
- [Gar93] R. A. Gardner. On the structure of the spectra of periodic travelling waves. J. Math. Pures Appl. (9), 72(5) :415–439, 1993.
- [GSS87] Manoussos Grillakis, Jalal Shatah, and Walter Strauss. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I. J. Funct. Anal., 74 :160–197, 1987.
- [KD15] Todd Kapitula and Bernard Deconinck. On the spectral and orbital stability of spatially periodic stationary solutions of generalized Korteweg-de Vries equations. In Hamiltonian partial differential equations and applications. Selected papers based on the presentations at the conference on Hamiltonian PDEs : analysis, computations and applications, Toronto, Canada, January 10–12, 2014, pages 285–322. Toronto : The Fields Institute for Research in the Mathematical Sciences; New York, NY : Springer, 2015.
- [KP13] Todd Kapitula and Keith Promislow. Spectral and dynamical stability of nonlinear waves, volume 185 of Appl. Math. Sci. New York, NY : Springer, 2013.
- [Kuc93] Peter Kuchment. Floquet theory for partial differential equations, volume 60 of Oper. Theory : Adv. Appl. Basel : Birkhäuser Verlag, 1993.

[Mie17a] Colin Mietka. On the well-posedness of a quasi-linear Korteweg-de Vries equation. Ann. Math. Blaise Pascal, 24(1) :83–114, 2017.

[Mie17b] Colin Mietka. Ondes périodiques dans des systèmes d'ÉDP hamiltoniens : stabilité, modulations et c
Theses, Université de Lyon, February 2017.